

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА

§ 109. Волна разрежения

Линия пересечения двух ударных волн является в математическом отношении особой линией двух функций, описывающих движение газа. Такой же особой линией является край всякого острого угла на поверхности обтекаемых газом тел. Оказывается возможным исследовать движение газа вблизи особой линии в самом общем виде (*L. Prandtl, Th. Meyer, 1908*).

Рассматривая область вблизи небольшого участка особой линии, мы можем считать последнюю прямой, которую мы выберем в качестве оси z цилиндрической системы координат r, φ, z . Вблизи особой линии все величины существенным образом зависят от угла φ . Напротив, от координаты r они зависят лишь слабо, и при достаточно малых r зависимостью от r можно вообще пренебречь. Несущественна также зависимость величин от координаты z , — изменением картины течения вдоль небольшого участка особой линии можно пренебречь.

Таким образом, мы должны исследовать стационарное движение, при котором все величины являются функциями только от φ . Уравнение сохранения энтропии $v \nabla s = 0$ дает $v_\varphi \frac{ds}{d\varphi} = 0$, откуда $s = \text{const}$ ¹⁾, т. е. движение изэнтропично. Поэтому в уравнении Эйлера можно писать ∇w вместо $\nabla p/\rho$: $(v \nabla) \mathbf{y} = -\nabla w$. В цилиндрических координатах получаем три уравнения:

$$\frac{v_\varphi}{r} \frac{dv_r}{d\varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} = 0, \quad \frac{v_\varphi}{r} \frac{dv_\varphi}{d\varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{d\varphi}, \quad v_\varphi \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = 0.$$

Из последнего имеем $v_z = \text{const}$; без ограничения общности можно положить $v_z = 0$ и рассматривать движение как плоское, — это сводится просто к соответствующему выбору скорости движения системы координат вдоль оси z . Первые два уравнения переписываем в виде

$$v_\varphi = \frac{dv_r}{d\varphi}, \tag{109,1}$$

$$v_\varphi \left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\varphi} = -\frac{dw}{d\varphi}. \tag{109,2}$$

¹⁾ Если положить $v_\varphi = 0$ (вместо $ds/d\varphi = 0$), то, как легко заключить из написанных ниже уравнений движения, получится $v_r = 0, v_z \neq 0$. Такое движение соответствовало бы пересечению поверхностей тангенциальных разрывов (со скачком скорости v_z) и ввиду неустойчивости таких разрывов не представляет интереса.

Подставляя (109,1) в (109,2), получаем:

$$v_{\varphi} \frac{dv_{\varphi}}{d\varphi} + v_r \frac{dv_r}{d\varphi} = - \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

или, интегрируя:

$$\omega + \frac{v_{\varphi}^2 + v_r^2}{2} = \text{const.} \quad (109,3)$$

Заметим, что равенство (109,1) означает, что $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, т. е. движение потенциально; в связи с этим и имеет место уравнение Бернулли (109,3).

Далее, уравнение непрерывности $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ дает

$$\rho v_r + \frac{d}{d\varphi}(\rho v_{\varphi}) = \rho \left(v_r + \frac{dv_{\varphi}}{d\varphi} \right) + v_{\varphi} \frac{d\rho}{d\varphi} = 0. \quad (109,4)$$

Используя (109,2), получим отсюда:

$$\left(\frac{dv_{\varphi}}{d\varphi} + v_r \right) \left(1 - v_{\varphi}^2 \frac{d\rho}{d\varphi} \right) = 0.$$

Но производная $dp/d\rho$, которую правильнее писать в виде $(\partial p/\partial \rho)_s$, есть квадрат скорости звука. Таким образом,

$$\left(\frac{dv_{\varphi}}{d\varphi} + v_r \right) \left(1 - \frac{v_{\varphi}^2}{c^2} \right) = 0. \quad (109,5)$$

Этому уравнению можно удовлетворить двумя способами. Во-первых, может быть

$$\frac{dv_{\varphi}}{d\varphi} + v_r = 0.$$

Тогда из (109,2) имеем $\rho = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, а из (109,3) получаем, что и $v^2 = v_r^2 + v_{\varphi}^2 = \text{const}$, т. е. скорость постоянна по абсолютной величине. Легко видеть, что и направление скорости в этом случае постоянно. Угол χ , образуемый скоростью с некоторым заданным направлением в плоскости движения, равен (рис. 96)

$$\chi = \varphi + \arctg \frac{v_{\varphi}}{v_r}. \quad (109,6)$$

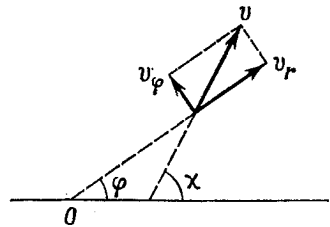


Рис. 96

Дифференцируя это выражение по φ и используя (109,1—2), получаем после простого преобразования:

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = - \frac{v_r}{\rho v_{\varphi} v^2} \frac{d\rho}{d\varphi}. \quad (109,7)$$

При $\rho = \text{const}$ имеем, действительно, $\chi = \text{const}$. Таким образом,

приравнивая нулю первый множитель в (109,5), мы получаем просто тривиальное решение — однородный поток.

Во-вторых, уравнению (109,5) можно удовлетворить, положив $1 = v_\varphi^2/c^2$, т. е. $v_\varphi = \pm c$. Радиальная же скорость определится из (109,3). Обозначая в этом уравнении const посредством ω_0 , получаем:

$$v_\varphi = \pm c, \quad v_r = \pm \sqrt{2(\omega_0 - \omega) - c^2}.$$

В этом решении перпендикулярная к радиус-вектору составляющая v_φ скорости в каждой точке равна по величине местной скорости звука. Полная же скорость $v = \sqrt{v_\varphi^2 + v_r^2}$, следовательно, больше скорости звука. Как абсолютная величина скорости, так и ее направление меняются от точки к точке. Поскольку скорость звука не может пройти через нуль, то ясно, что непрерывная функция $v_\varphi(\varphi)$ должна быть равна везде $+c$ или же везде $-c$. Выбирая соответствующим образом направление отсчета угла φ , мы можем условиться считать, что $v_\varphi = c$. Что касается выбора знака у v_r , то мы увидим ниже, что он диктуется физическими соображениями и должен быть положительным. Таким образом:

$$v_\varphi = c, \quad v_r = \sqrt{2(\omega_0 - \omega) - c^2}. \quad (109,8)$$

Из уравнения непрерывности (109,4) имеем $d\varphi = -d(\rho v_\varphi)/\rho v_r$. Подставив сюда (109,8) и интегрируя, получим:

$$\varphi = - \int \frac{d(\rho c)}{\rho \sqrt{2(\omega_0 - \omega) - c^2}}. \quad (109,9)$$

Если известно уравнение состояния газа и уравнение адиабаты (напомним, что $s = \text{const}$), то с помощью этой формулы можно определить зависимость всех величин от угла φ . Таким образом, формулы (109,8—9) полностью определяют движение газа.

Займемся теперь более подробным изучением полученного решения. Прежде всего заметим, что прямые $\varphi = \text{const}$ пересекают в каждой точке линии тока под углом Маха (его синус равен $v_\varphi/v = c/v$), т. е. являются характеристиками. Таким образом, одно из двух семейств характеристик (в плоскости x, y) представляет собой пучок выходящих из особой точки прямых и обладает в данном случае важным свойством — вдоль каждой из них все величины остаются постоянными. В этом смысле рассматриваемое решение играет в теории плоского стационарного движения такую же роль, какую играет изученное в § 99 автомодельное движение в теории нестационарных одномерных течений. Мы вернемся еще к этому вопросу в § 115.

Из (109,9) видно, что $(\rho c)' < 0$ ($'$ обозначает дифференцирование по φ). Написав

$$(\rho c)' = \frac{d(\rho c)}{d\varphi} \rho'$$

и замечая, что производная $d(\rho c)/d\rho$ положительна (см. (99,9)), мы находим, что производная $\rho' < 0$; вместе с нею отрицательны и производные $\rho' = c^2\rho'$, $\omega' = \rho'/\rho$. Далее, из того, что производная ω' отрицательна, следует, что абсолютная величина скорости $v = \sqrt{2(\omega_0 - \omega)}$ — возрастающая функция φ . Наконец, из (109,7) следует, что $\chi' > 0$. Таким образом, получаем следующие неравенства:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} < 0, \quad \frac{d\omega}{d\varphi} < 0, \quad \frac{dv}{d\varphi} > 0, \quad \frac{d\chi}{d\varphi} > 0. \quad (109,10)$$

Другими словами, в направлении обхода вокруг особой точки, совпадающем с направлением обтекания, плотность и давление падают, а вектор скорости возрастает по абсолютной величине и поворачивается в направлении обхода.

Описанное движение часто называют *волной разрежения*; ниже мы будем пользоваться этим термином.

Легко видеть, что волна разрежения не может иметь места во всей области вокруг особой линии. Действительно, поскольку v есть монотонно возрастающая функция φ , то при полном обходе вокруг начала координат (т. е. при изменении φ на 2π) мы получили бы для v значение, отличное от исходного, что нелепо. Ввиду этого истинная картина движения вокруг особой линии должна представлять собой совокупность секториальных областей, разделённых плоскостями $\varphi = \text{const}$, являющимися поверхностями разрывов. В каждой из таких областей происходит либо движение, описываемое волной разрежения, либо движение с постоянной скоростью. Число и характер этих областей для различных конкретных случаев будут установлены в следующих параграфах. Сейчас укажем лишь, что граница между волной разрежения и областью однородного течения должна быть непременно слабым разрывом. Действительно, эта граница не может быть тангенциальным разрывом (разрывом скорости v_r), так как на ней не обращается в нуль нормальная к ней компонента скорости $v_\varphi = c$. Она не может также быть ударной волной, так как нормальная компонента скорости (v_φ) по одну сторону от такого разрыва должна была бы быть больше, а по другую — меньше скорости звука, между тем как в данном случае с одной из сторон границы мы во всяком случае имеем $v_\varphi = c$.

Из сказанного можно вывести важное следствие. Возмущения, вызывающие образование слабых разрывов, исходят от особой линии (оси z) и распространяются по направлению от нее. Это значит, что ограничивающие волну разрежения слабые разрывы должны быть «исходящими» по отношению к этой линии, т. е. компонента скорости v_r касательная к слабому разрыву должна быть положительна. Таким образом, мы оправдали сделанный в (109,8) выбор знака у v_r .

Применим теперь полученные формулы к политропному газу. В таком газе $\omega = c^2/(\gamma - 1)$; уравнение же адиабаты Пуассона можно написать в виде

$$\rho c^{-2/(\gamma-1)} = \text{const}, \quad \rho c^{-2\gamma/(\gamma-1)} = \text{const} \quad (109,11)$$

(ср. (99,13)). Пользуясь этими формулами, представим интеграл (109,9) в виде

$$\varphi = - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \int \frac{dc}{\sqrt{c_*^2 - c^2}},$$

где c_* — критическая скорость (см. (83,14)). Отсюда

$$\varphi = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c}{c_*} + \text{const},$$

или, выбирая начало отсчета φ так, чтобы было $\text{const} = 0$:

$$v_\varphi = c = c_* \cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi. \quad (109,12)$$

Согласно формуле (109,8) получаем отсюда:

$$v_r = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} c_* \sin \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi. \quad (109,13)$$

Далее, воспользовавшись уравнением адиабаты Пуассона в виде (109,11), находим зависимость давления от угла φ :

$$p = p_* \left(\cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (109,14)$$

Наконец, для угла χ (109,6) имеем:

$$\chi = \varphi + \text{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \text{ctg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right) \quad (109,15)$$

(угол χ отсчитывается от того же направления, от которого отсчитывается φ).

Поскольку должно быть $v_r > 0$, $c > 0$, то угол φ в этих формулах может меняться только в пределах между $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_{\text{max}}$, где

$$\varphi_{\text{max}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \quad (109,16)$$

Это значит, что волна разрежения может занимать сектор с углом раствора, не превышающим φ_{max} ; так, для двухатомного газа (воздух) этот угол равен $219,3^\circ$. При изменении φ от 0 до φ_{max} угол χ меняется от $\pi/2$ до φ_{max} . Таким образом, направление скорости в волне разрежения может повернуться на угол, не превышающий $\varphi_{\text{max}} - \pi/2$ (для воздуха $129,3^\circ$).

При $\varphi = \varphi_{\max}$ давление обращается в нуль. Другими словами, если волна разрежения простирается вплоть до этого угла,

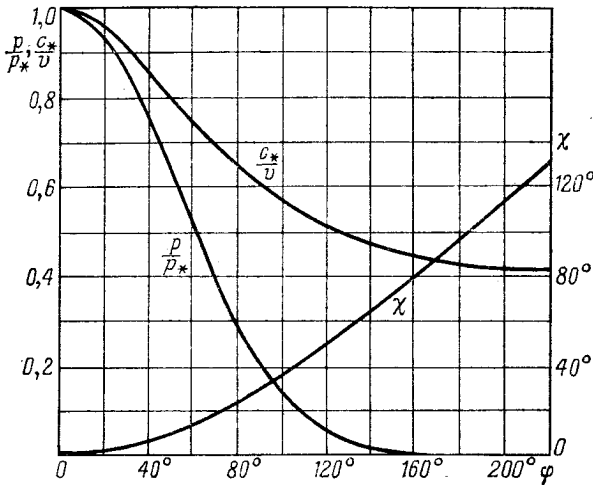


Рис. 97

то ограничивающий ее с этой стороны слабый разрыв представляет собой границу с вакуумом. При этом он, естественно, совпадает с одной из линий тока; имеем здесь:

$$v_\varphi = c = 0,$$

$$v_r = v = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} c_* = v_{\max},$$

т. е. скорость направлена по радиусу и достигает своего предельного значения v_{\max} (см. § 83).

На рис. 97 даны графики величин p/p_* , c_*/v и χ как функции угла φ для воздуха ($\gamma = 1,4$).

Полезно заметить форму, которую имеет определяемая формулами (109,12—13) кривая в плоскости v_x, v_y (так называемый годограф скоростей). Это — дуга эпициклоиды, построенной между окружностями радиусов $v = c_*$ и $v = v_{\max}$ (рис. 98).

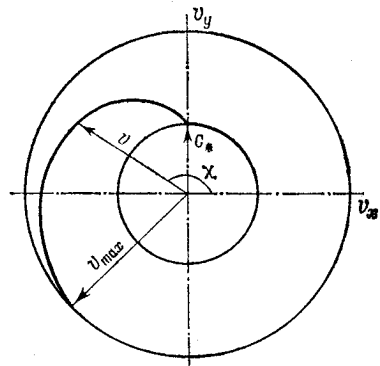


Рис. 98

Задачи

1. Определить форму линий тока в волне разрежения.

Решение. Уравнение линий тока для двухмерного движения в полярных координатах есть $dr/v_r = r d\varphi/v_\varphi$. Подставляя сюда (109,12—13)

и интегрируя, получаем:

$$r = r_0 \left(\cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Эти линии тока представляют собой семейство подобных кривых, обращенных своей вогнутостью в сторону начала координат, являющегося центром подобия.

2. Определить наибольший возможный угол между слабыми разрывами, ограничивающими волну разрежения, при заданных значениях v_1 , c_1 скорости газа и скорости звука на первом из них.

Решение. Для соответствующего первому разрыву значения угла φ находим из (109,12):

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arccos} \frac{c_1}{c_*}.$$

Значения же $\varphi_2 = \varphi_{\max}$, так что искомым углом равен

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arcsin} \frac{c_1}{c_*}.$$

Критическая скорость c_* выражается через v_1 , c_1 уравнением Бернулли

$$w_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{c_1^2}{\gamma-1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} c_*^2.$$

Наибольший возможный угол поворота скорости газа в волне разрежения получится соответственно с помощью (109,15) как разность $\chi_{\max} = \chi(\varphi_1) - \chi(\varphi_2)$:

$$\chi_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arcsin} \frac{c_1}{c_*} - \operatorname{arcsin} \frac{c_1}{v_1}.$$

Как функция от v_1/c_1 , χ_{\max} имеет наибольшее значение при $v_1/c_1 = 1$

$$\chi_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right).$$

При $v_1/c_1 \rightarrow \infty$ χ_{\max} стремится к нулю, как

$$\chi_{\max} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{c_1}{v_1}.$$

§ 110. Типы пересечений поверхностей разрыва

Ударные волны могут пересекаться друг с другом; это пересечение происходит вдоль некоторой линии. Рассматривая движение в окрестности небольших участков этой линии, мы можем считать ее прямой, а поверхности разрывов — плоскими. Таким образом, достаточно рассмотреть пересечение плоских ударных волн.

Линия пересечения разрывов представляет собой в математическом отношении особую линию (как уже указывалось в начале § 109). Вся картина движения вокруг нее складывается из ряда секториальных областей, в каждой из которых имеется либо однородный поток, либо описанная в § 109 волна разре-