

и интегрируя, получаем:

$$r = r_0 \left( \cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Эти линии тока представляют собой семейство подобных кривых, обращенных своей вогнутостью в сторону начала координат, являющегося центром подобия.

2. Определить наибольший возможный угол между слабыми разрывами, ограничивающими волну разрежения, при заданных значениях  $v_1$ ,  $c_1$  скорости газа и скорости звука на первом из них.

Решение. Для соответствующего первому разрыву значения угла  $\varphi$  находим из (109,12):

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arccos} \frac{c_1}{c_*}.$$

Значения же  $\varphi_2 = \varphi_{\max}$ , так что искомым углом равен

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arcsin} \frac{c_1}{c_*}.$$

Критическая скорость  $c_*$  выражается через  $v_1$ ,  $c_1$  уравнением Бернулли

$$w_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{c_1^2}{\gamma-1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} c_*^2.$$

Наибольший возможный угол поворота скорости газа в волне разрежения получится соответственно с помощью (109,15) как разность  $\chi_{\max} = \chi(\varphi_1) - \chi(\varphi_2)$ :

$$\chi_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arcsin} \frac{c_1}{c_*} - \operatorname{arcsin} \frac{c_1}{v_1}.$$

Как функция от  $v_1/c_1$ ,  $\chi_{\max}$  имеет наибольшее значение при  $v_1/c_1 = 1$

$$\chi_{\max} = \frac{\pi}{2} \left( \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right).$$

При  $v_1/c_1 \rightarrow \infty$   $\chi_{\max}$  стремится к нулю, как

$$\chi_{\max} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{c_1}{v_1}.$$

## § 110. Типы пересечений поверхностей разрыва

Ударные волны могут пересекаться друг с другом; это пересечение происходит вдоль некоторой линии. Рассматривая движение в окрестности небольших участков этой линии, мы можем считать ее прямой, а поверхности разрывов — плоскими. Таким образом, достаточно рассмотреть пересечение плоских ударных волн.

Линия пересечения разрывов представляет собой в математическом отношении особую линию (как уже указывалось в начале § 109). Вся картина движения вокруг нее складывается из ряда секториальных областей, в каждой из которых имеется либо однородный поток, либо описанная в § 109 волна разре-

жения. Ниже излагается общая классификация возможных типов пересечения поверхностей разрывов<sup>1)</sup>.

Прежде всего необходимо сделать следующее замечание. Если по обе стороны ударной волны движение газа является сверхзвуковым, то (как было указано в начале § 92) можно говорить о «направлении» ударной волны и соответственно этому различать ударные волны, «исходящие» от линии пересечения, и волны, «приходящие» к ней. В первом случае касательная составляющая скорости направлена от линии пересечения, и можно сказать, что возмущения, вызывающие образование разрыва, исходят от этой линии. Во втором же случае возмущения исходят из какого-то места, постороннего по отношению к линии пересечения.

Если по одну из сторон от ударной волны движение является дозвуковым, то возмущения распространяются в обе стороны вдоль ее поверхности и понятие о направлении волны теряет, строго говоря, смысл. Для нижеследующих рассуждений существенно, однако, что вдоль такого разрыва могут распространяться исходящие от места пересечения возмущения. В этом смысле подобные ударные волны в излагаемых ниже рассуждениях играют ту же роль, что и чисто сверхзвуковые исходящие волны, и под исходящими ударными волнами ниже подразумеваются обе эти категории волн.

На следующих ниже рисунках изображаются картины течения в плоскости, перпендикулярной к линии пересечения. Без ограничения общности можно считать, что движение происходит в этой плоскости. Параллельная линии пересечения (а потому и всем плоскостям разрывов) компонента скорости должна быть одинакова во всех областях вокруг линии пересечения и поэтому надлежащим выбором системы координат может быть всегда обращена в нуль.

Укажем, прежде всего, некоторые заведомо невозможные конфигурации.

Легко видеть, что не может быть такого пересечения ударных волн, при котором нет хотя бы одной приходящей волны. Так, при изображенном на рис. 99, а пересечении двух уходящих ударных волн линии тока натекающего слева потока отклонились бы в разные стороны, между тем как во всей области 2 скорость должна быть постоянной; это затруднение не может быть преодолено введением в область 2 еще каких-либо других разрывов<sup>2)</sup>. Аналогичным образом убеждаемся в невозможности

<sup>1)</sup> Она была дана Л. Д. Ландау (1944), а в некоторых пунктах (относящихся к взаимодействию ударных волн с тангенциальными и слабыми разрывами) дополнена С. П. Дьяковым (1954).

<sup>2)</sup> Чтобы не загромождать текст однообразными рассуждениями, мы не будем приводить аналогичные соображения для случаев, когда имеются области дозвукового движения и уходящей волной является в действительности ударная волна, граничащая с дозвуковой областью.

изображенного на рис. 99, б пересечения уходящей ударной волны с уходящей же волной разрежения; хотя в такой картине и можно добиться постоянства направления скорости в области 2, но при этом не сможет быть выполнено условие постоянства давления, так как в ударной волне давление возрастает, а в волне разрежения — падает.

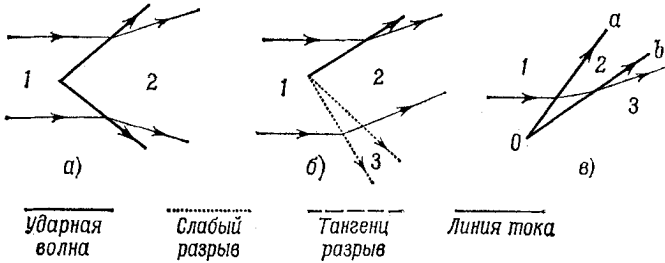


Рис. 99

Далее, поскольку пересечение не может оказывать обратного влияния на приходящие ударные волны, то одновременное пересечение (вдоль общей линии) более чем двух таких волн, возникающих от каких-то посторонних причин, было бы невероятной случайностью. Таким образом, в картине пересечения могут участвовать всего лишь одна или две приходящие ударные волны.

Весьма существенно следующее обстоятельство: протекающий мимо точки пересечения газ может пройти лишь через одну исходящую из этой точки ударную волну или волну разрежения. Пусть, например, газ проходит через следующие друг за другом две исходящие из точки  $O$  ударные волны, как это показано на рис. 99, в. Поскольку позади волны  $Oa$  нормальная компонента

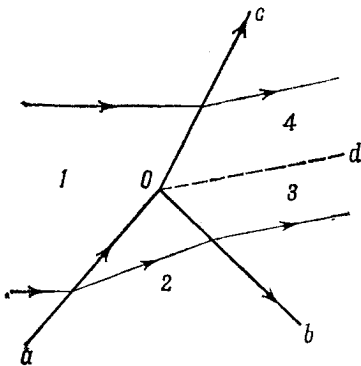


Рис. 100

скорости  $v_{2n} < c_2$ , то тем более была бы меньше  $c_2$  нормальная к волне  $Ob$  компонента скорости в области 2 в противоречии с основным свойством ударных волн. Аналогичным образом убеждаемся в невозможности прохождения газа через следующие одна за другой исходящие из точки  $O$  две волны разрежения или волну разрежения и ударную волну.

Эти соображения, очевидно, не распространяются на приходящие к точке пересечения ударные волны.

Теперь мы можем приступить к перечислению возможных типов пересечений.

На рис. 100 изображено пересечение, в котором участвует всего одна проходящая ударная волна  $Oa$ ; две другие ударные волны  $Ob$  и  $Oc$  являются исходящими. Этот случай можно рассматривать как разветвление одной ударной волны на две<sup>1)</sup>. Легко видеть, что наряду с двумя уходящими ударными волнами должен возникнуть еще и один расположенный между ними тангенциальный разрыв  $Od$ , разделяющий потоки газа, протекшего соответственно через  $Ob$  или  $Oc$ <sup>2)</sup>. Действительно, волна  $Oa$  возникает от посторонних причин и потому является полностью заданной. Это значит, что имеют определенные заданные значения термодинамические величины (скажем,  $p$ ,  $\rho$ ) и скорость  $v$  в областях 1 и 2. Поэтому в нашем распоряжении остаются всего две величины — углы, определяющие направления разрывов  $Ob$  и  $Oc$ . С их помощью, однако, вообще говоря, нельзя удовлетворить четырем условиям (постоянство  $p$ ,  $\rho$  и двух компонент скорости) в области 3—4, которые требовались бы при отсутствии тангенциального разрыва  $Od$ . Введение же последнего уменьшает число условий до двух (постоянство давления и направления скорости).

Разветвиться может, однако, отнюдь не произвольная ударная волна. Проходящая ударная волна определяется (при заданном термодинамическом состоянии газа 1) двумя параметрами, например, числом  $M_1$  натекающего потока и отношением давлений  $p_1/p_2$ . Разветвление оказывается возможным лишь в определенной области плоскости этих двух переменных<sup>3)</sup>.

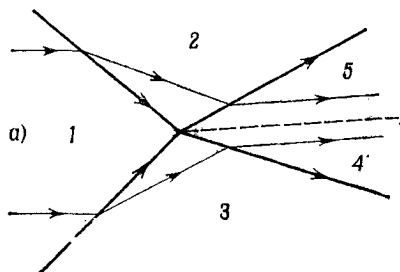
Пересечения, содержащие две проходящие ударные волны, можно рассматривать как результат «столкновения» двух волн, возникших где-то от посторонних причин. При этом возможны два существенно различных случая, изображенных на рис. 101.

<sup>1)</sup> Следует отметить, что разветвление ударной волны на одну ударную же волну и одну волну разрежения невозможно (без труда можно убедиться в том, что при таком пересечении нельзя было бы согласовать друг с другом изменения давления и изменения направлений скорости в обеих исходящих волнах).

<sup>2)</sup> Как всегда тангенциальный разрыв в действительности размывается в турбулентную область.

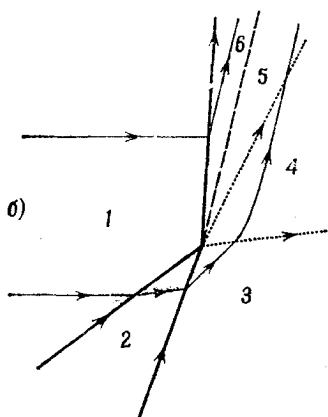
<sup>3)</sup> Определение этой области связано с громоздкими алгебраическими или численными расчетами. Повторим лишний раз о необходимости следить при этом за «направлением» ударных волн. Случаи, в которых имелись бы две проходящие и одна уходящая ударные волны представлял бы собой пересечение двух разрывов, возникающих от посторонних причин и потому проходящих к месту пересечения с заданными значениями всех параметров. Их слияние в одну волну возможно лишь при вполне определенном соотношении между этими произвольными параметрами, что являлось бы невероятной случайностью.

В первом случае столкновение двух ударных волн приводит к возникновению двух ударных же волн, исходящих из точки пересечения. Выполнение всех необходимых условий снова требует возникновения тангенциального разрыва, расположенного между уходящими ударными волнами.



Во втором случае вместо двух ударных волн возникают одна ударная волна и одна волна разрежения.

Две сталкивающиеся ударные волны определяются тремя параметрами (например,  $M_1$  и отношениями  $p_1/p_2$ ,  $p_1/p_3$ ). Описанные типы пересечений возможны лишь в определенных областях значений этих параметров. Если же значения параметров лежат вне этих областей, то до столкновения ударных волн должно произойти их разветвление.



Рассмотрим, далее, типы пересечений, которые могут возникнуть при падении ударной волны на тангенциальный разрыв.

На рис. 102, а изображено отражение ударной волны от границы раздела между движущимся и неподвижным газом. Область 5 есть область не-

подвижного газа, отделенная от движущегося газа тангенциальным разрывом. В обеих граничных с нею областях 1 и 4 давление должно быть одинаковым (равным  $p_5$ ). Поскольку же в ударной волне давление возрастает, то ясно, что она должна отразиться от тангенциального разрыва в виде волны разрежения 3, понижающей давление до первоначального значения. В точке пересечения тангенциальный разрыв терпит излом.

Пересечение ударной волны с тангенциальным разрывом, по другую сторону которого скорость жидкости отлична от нуля, но дозвуковая, вообще невозможно. Действительно, в дозвуковую область не могут проникнуть ни ударная волна, ни волна разрежения; поэтому в дозвуковой области может быть только тривиальное течение с постоянной скоростью, так что тангенциальный разрыв не может иметь излома. Отражение ударной волны в виде волны разрежения невозможно, так как это неизбежно

Рис. 101

вызвало бы излом тангенциального разрыва; отражение в виде ударной волны тоже невозможно, поскольку при этом нельзя было бы удовлетворить условию равенства давлений на тангенциальном разрыве.

Если же течение по обе стороны тангенциального разрыва сверхзвуковое, возможны две различные конфигурации. В одном случае (рис. 102, б) наряду с падающей на тангенциальный разрыв ударной волной возникают еще и отраженная и преломленная ударные волны; тангенциальный разрыв терпит излом.

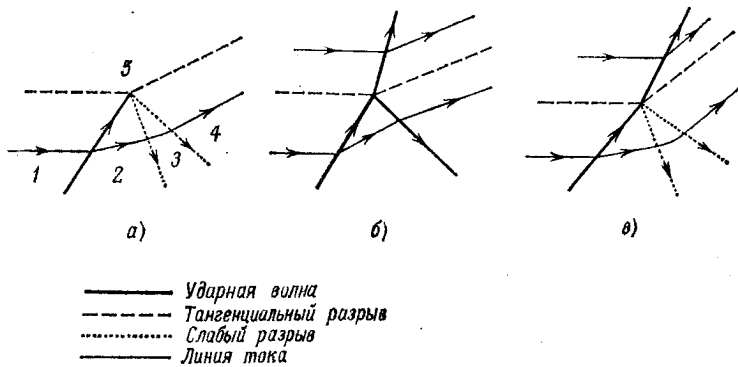


Рис. 102

В другом случае (рис. 102, в) возникают отраженная волна разрежения и прошедшая в другую среду преломленная ударная волна. Обе эти конфигурации возможны только в определенных областях значений параметров падающей ударной волны и тангенциального разрыва<sup>1)</sup>.

Взаимодействие двух тангенциальных разрывов может привести к конфигурации без входящих ударных волн, а лишь с двумя уходящими (что невозможно, как было указано выше, в отсутствии тангенциальных разрывов). В области 1 на рис. 103 газ покоится; конфигурация возможна, очевидно, лишь при сверхзвуковом течении в областях 2 и 5.

Остановимся кратко на пересечениях ударной волны с проходящим от постороннего источника слабым разрывом. Здесь могут представиться два случая в зависимости от того, является ли движение за ударной волной сверх- или дозвуковым. В первом случае (рис. 104, а) слабый разрыв преломляется на ударной волне, проходя в пространство позади нее (сама же ударная волна в точке пересечения излома не имеет; ее форма имеет лишь особенность более высокого порядка — того же характера,

<sup>1)</sup> Эти две конфигурации в известном смысле обобщают случаи, изображенные на рис. 100 и 101, б.

что и особенность на слабом разрыве). Кроме того, изменение энтропии в ударной волне должно привести к возникновению позади нее еще и слабого тангенциального разрыва, на котором испытывают скачок производные энтропии.

Если же позади ударной волны течение становится дозвуковым, то слабый разрыв не может проникнуть в эту область и оканчивается в точке пересечения (рис. 104, б). Последняя является в этом случае особой точкой (так, если падающий разрыв представляет собой разрыв первых производных гидродинамических величин, уходящий слабый тангенциальный разрыв, форма ударной волны и распределение давления в окрестности точки пересечения обладают, как можно показать,

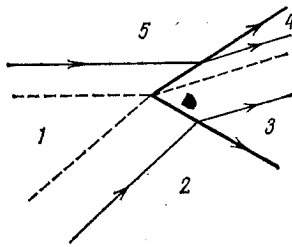


Рис. 103

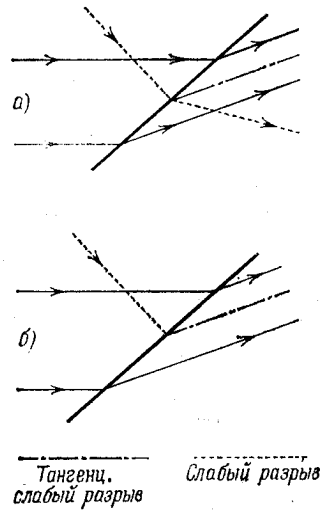


Рис. 104

логарифмической особенностью). Кроме того, как и в предыдущем случае, позади ударной волны возникает слабый тангенциальный разрыв энтропии.<sup>1)</sup>

Сказанное относительно взаимодействия ударных волн со слабым разрывом справедливо и для взаимодействия со слабыми тангенциальными разрывами. Если течение в области за ударной волной сверхзвуковое, в ней возникают слабый и слабый тангенциальный разрывы. Если же течение за ударной волной дозвуковое, то в нем возникает лишь преломленный слабый же тангенциальный разрыв.

Наконец, упомянем еще о взаимодействии слабых разрывов с тангенциальными. Если течение по обе стороны тангенциального разрыва сверхзвуковое, наряду с падающим возникают отраженный и преломленный слабые разрывы. Если же течение по другую сторону тангенциального разрыва дозвуковое, слабый разрыв в него не проникает, происходит «полное внутреннее отражение» слабого разрыва.

<sup>1)</sup> Детальное количественное исследование пересечений ударных волн со слабыми разрывами дано Дьяковым С. П. — ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 948, 962.