

Угол φ ищем в виде $\varphi = \alpha_1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll \alpha_1$ и из того же выражения находим

$$\varphi - \alpha_1 = \frac{\gamma + 1}{4} \frac{M_1^2}{M_1^2 - 1} \chi.$$

При $M_1 \gg 1$ угол $\alpha_1 \approx 1/M_1$ и для справедливости полученных формул должно быть $\chi M_1 \ll 1$.

2. То же если число M_1 настолько велико, что $M_1 \chi \gg 1$.

Решение. В этом случае углы φ и χ одинакового порядка малости. Из (92,11) находим

$$\varphi = \frac{\gamma + 1}{2} \chi.$$

Для отношения давлений имеем согласно (92,9)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 \varphi^2 = \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2} M_1^2 \chi^2.$$

Значение M_2 позади волны (из 92,12):

$$M_2 = \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma - 1)}},$$

т.е. остается большим по сравнению с 1, но не по сравнению с $1/\chi$. В том же приближении

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{t_2}{\sigma_1} = 1$$

(разность $v_1 - v_2 \sim v_1 \chi^2$). Поэтому уменьшение числа Маха фактически связано лишь с увеличением скорости звука: $M_2/M_1 = c_1/c_2$.

§ 113. Обтекание конического острия

Исследование сверхзвукового стационарного течения вблизи острия на поверхности обтекаемого тела представляет собой трехмерную задачу, и потому несравненно сложнее исследования обтекания угла с линейным краем. Полностью может быть решена задача об осесимметричном обтекании острия, которое мы здесь и рассмотрим.

Вблизи своего конца осесимметрическое острие можно рассматривать как прямой конус кругового сечения, и таким образом, задача состоит в исследовании обтекания конуса однородным потоком, натекающим в направлении оси конуса. С качественной стороны картина выглядит следующим образом.

Как и при аналогичном обтекании плоского угла, должна возникнуть ударная волна (*A. Busemann, 1929*); из соображений симметрии очевидно, что эта волна будет представлять собой коническую поверхность, коаксиальную с обтекаемым конусом и имеющую общую с ним вершину (на рис. 114 изображен разрез конуса плоскостью, проходящей через его ось). Однако в отличие от плоского случая ударная волна не осуществляет здесь поворота скорости газа на полный угол χ , необходимый для те-

чения вдоль поверхности конуса (2χ — угол раствора конуса). После перехода через поверхность разрыва линии тока искривляются, асимптотически приближаясь к образующим обтекаемого конуса. Это искривление сопровождается непрерывным уплотнением (добавочным к уплотнению в самой волне) и соответственным падением скорости.

Изменение направления и величины скорости на самой ударной волне определяется ударной полярой, причем и здесь осуществляется решение, отвечающее «слабой» ветви поляры¹⁾. Соответственно, для каждого значения числа Маха натекающего потока $M_1 = v_1/c_1$ существует определенное предельное значение угла полураствора конуса χ_{\max} , за которым такое обтекание становится невозможным и ударная волна «отсоединяется» от вершины конуса. Поскольку за ударной волной происходит дополнительный поворот течения, значения χ_{\max} для обтекания конуса превышают (при одинаковых M_1) значения χ_{\max} для плоского случая

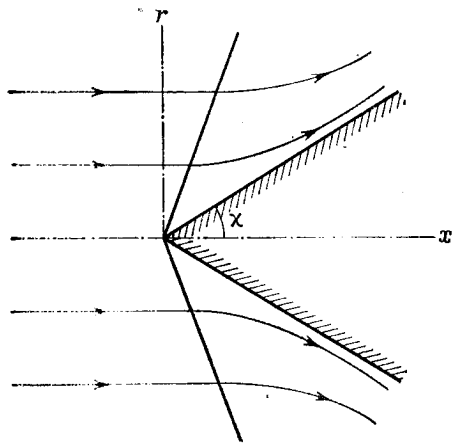


Рис. 114

для обтекания клина). Непосредственно за ударной волной движение газа обычно сверхзвуковое, но может быть и дозвуковым (при χ , близких к χ_{\max}). Сверхзвуковое за ударной волной течение по мере приближения к поверхности конуса может стать дозвуковым, и тогда на определенной конической поверхности скорость проходит через звуковое значение.

Коническая ударная волна пересекает все линии тока натекающего потока под одинаковым углом, а потому обладает постоянной интенсивностью. Отсюда следует (см. ниже § 114), что и за ударной волной течение будет изэнтропическим и потенциальным.

В силу симметрии задачи и ее автомодельности (отсутствия в ее условиях какой-либо характеристической постоянной длины) очевидно, что распределение всех величин (скорости, давления) в потоке за ударной волной будет функцией только от угла θ наклона к оси конуса (оси x на рис. 114) радиус-вектора, прове-

¹⁾ Это может, однако, быть не так при некоторых «экзотических» формах обтекаемого тела. Так, существуют указания на отбор волны «сильного» семейства при обтекании конуса на переднем крае широкого тупого тела.

денного в данную точку из вершины конуса. Соответственно уравнения движения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям; граничные условия к этим уравнениям на ударной волне определяются уравнением ударной поляры, а на поверхности конуса — требуют параллельности скорости образующим конуса. Эти уравнения, однако, не могут быть проинтегрированы в аналитическом виде и должны решаться численным образом. Отсылая за результатами таких вычислений к оригинальным источникам¹⁾, мы ограничимся лишь кривой (рис. 65), дающей зависимость предельного допустимого угла раствора конуса $2\chi_{\max}$ как функции от числа M_1 . Укажем также, что при $M_1 \rightarrow 1$ угол χ_{\max} стремится к нулю по закону

$$\chi_{\max} = \text{const} \sqrt{\frac{M_1 - 1}{\gamma + 1}}, \quad (113,1)$$

как это можно заключить на основании общего околосвукового закона подобия (126,11) (const есть число, не зависящее ни от M_1 , ни от рода газа).

Замкнутое аналитическое решение задачи об обтекании конуса возможно лишь в предельном случае малых углов раствора конуса (*Th. Karman, N. B. Moor, 1932*). Очевидно, что в таком случае скорость газа во всем пространстве будет лишь незначительно отличаться от скорости v_1 натекающего потока. Обозначив посредством v малую разность между скоростью газа в данной точке и скоростью v_1 и введя ее потенциал φ , мы можем применить для последнего линеаризованное уравнение (114,4); если ввести цилиндрические координаты x, r, ω с осью вдоль оси конуса (ω — полярный угол), это уравнение примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (113,2)$$

или для осесимметрического движения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (113,3)$$

где введено обозначение

$$\beta = (M_1^2 - 1)^{1/2}. \quad (113,4)$$

Для того чтобы распределение скорости было функцией только от угла θ , потенциал должен иметь вид $\varphi = x f(\xi)$, где $\xi = r/x = \text{tg } \theta$. Сделав подстановку, получим для функции $f(\xi)$ уравнение

$$\xi(1 - \beta^2 \xi^2) f'' + f' = 0,$$

¹⁾ См. *Taylor G. I., Maccol J. W.* — Proc. Roy. Soc., 1933, v. 139A, p. 278; *Maccol J. W.* — Proc. Roy. Soc., 1937, v. 159A, p. 459. См. также изложение в книге: *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963, ч. II, § 27.

которое решается элементарно. Тривиальное решение $f = \text{const}$ соответствует однородному потоку, а второе решение есть

$$f = \text{const} \left(\sqrt{1 - \beta^2 \xi^2} - \text{Arch} \frac{1}{\beta \xi} \right).$$

Граничное условие на поверхности конуса (т. е. при $\xi = \text{tg } \chi \approx \chi$) гласит:

$$\frac{v_r}{v_1 + v_x} \approx \frac{1}{v_1} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \chi, \quad (113,5)$$

или $f' = v_1 \chi$. Отсюда $\text{const.} = v_1 \chi^2$, и в результате получим следующее окончательное выражение для потенциала (в области $x > \beta r^1$):

$$\varphi = v_1 \chi^2 \left[\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2} - x \text{Arch} \frac{x}{\beta r} \right]. \quad (113,6)$$

Обратим внимание на то, что φ имеет при $r \rightarrow 0$ логарифмическую особенность.

Отсюда находим компоненты скорости:

$$v_x = -v_1 \chi^2 \text{Arch} \frac{x}{\beta r}, \quad v_r = \frac{v_1 \chi^2}{r} \sqrt{x^2 - \beta^2 r^2}. \quad (113,7)$$

Давление на поверхности конуса вычисляется с помощью формулы (114,5); благодаря логарифмической особенности φ при $r \rightarrow 0$ скорость v_r на самой поверхности конуса (т. е. при малых r) велика по сравнению с v_x , и потому в формуле для давления должен быть сохранён член с v_r^2 . В результате получим:

$$p - p_1 = \rho_1 v_1^2 \chi^2 \left(\ln \frac{2}{\beta \chi} - \frac{1}{2} \right). \quad (113,8)$$

Все эти формулы, полученные с помощью линеаризованной теории, теряют применимость при слишком больших значениях M_1 , сравнимых с $1/\chi$ (см. § 127).

¹⁾ В рассматриваемом приближении конус $x = \beta r$ представляет собой поверхность слабого разрыва. В следующем приближении появляется ударная волна, интенсивность которой (относительный скачок давления) пропорциональна χ^4 , а угол раствора превосходит угол Маха на величину, тоже пропорциональную χ^4 .