ГЛАВА XII

ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

§ 114. Потенциальное движение сжимаемого газа

Мы встретимся в дальнейшем с многочисленными важными случаями, когда движение сжимаемого газа можно рассматривать как потенциальное практически во всем пространстве. Здесь мы выведем общие уравнения потенциального течения и рассмотрим в общем виде вопрос об их применимости [1].

Потенциальность течения сжимаемого газа нарушается, вообще говоря, ударными волнами; после прохождения через ударную волну потенциальный поток становится в общем случае вихревым. Исключение представляют, однако, случаи, когда стационарный потенциальный поток проходит через ударную волну постоянной (вдоль всей ее поверхности) интенсивности; таковы, например, случаи, когда однородный поток проходит волну, пересекающую все линии тока под одинаковым углом [2]. В таких случаях течение остается потенциальным и позади ударной волны.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся уравнением Эйлера, написанным в виде

$$\frac{1}{2}\nabla v^2 - [\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

(ср. (2.10)), или

$$\nabla\left(w + \frac{v^2}{2}\right) - [\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}] = T\nabla s,$$

где учтено термодинамическое соотношение $dw = T\,ds + dp/\rho$. Но в потенциальном потоке перед ударной волной $w + v^2/2 = \mathrm{const}$, а на ударной волне эта величина непрерывна; поэтому она останется постоянной и во всем пространстве позади ударной волны, так что будем иметь:

$$[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}] = -T\nabla s. \tag{114,1}$$

Потенциальный поток перед ударной волной изэнтропичен. В общем случае произвольной ударной волны с переменным вдоль ее поверхности скачком энтропии в пространстве за вол-

[1]) В этом параграфе течение еще не предполагается плоским!

[2]) С такими случаями мы уже встречались при изучении сверхзвукового обтекания клина и конуса (§§ 112, 113).

ной градиент $\nabla s \neq 0$, а вместе с ним будет отличен от нуля и $\operatorname{rot} \mathbf{v}$. Однако если ударная волна обладает постоянной интенсивностью, то и скачок энтропии в ней постоянен, так что течение за ней тоже будет изэнтропическим, т. е. $\nabla s = 0$. Отсюда следует, что либо $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, либо векторы $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ и $\mathbf{v}$ везде параллельны друг другу. Но последний случай невозможен: на самой ударной волне $\mathbf{v}$ во всяком случае имеет отличную от нуля нормальную компоненту, а нормальная компонента $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ во всяком случае равна нулю (нормальная компонента $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ определяется тангенциальными производными от тангенциальных компонент скорости, непрерывных на поверхности разрыва).

Другой важный случай, когда потенциальность течения можно считать не нарушающейся ударными волнами, — это случай волн малой интенсивности. Мы видели (§ 86), что в таких ударных волнах скачок энтропии есть величина третьего порядка по сравнению со скачком давления или скорости. Из соотношения (114,1) видно поэтому, что величиной третьего порядка будет и $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ за разрывом. Это и дает возможность считать, с точностью до малых величин высших порядков, течение потенциальным и позади ударной волны.

Выведем общее уравнение для потенциала скорости при произвольном стационарном потенциальном течении сжимаемого газа. Для этого исключаем плотность из уравнения непрерывности $\operatorname{div} \rho\mathbf{v} \equiv \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\rho = 0$ с помощью уравнения Эйлера

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{c^2}{\rho}\nabla\rho$$

и получаем:

$$c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = 0.$$

Вводя сюда потенциал согласно $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ и раскрывая векторные выражения, найдем искомое уравнение:

$$\left(c^2 - \varphi_x^2\right)\varphi_{xx} + \left(c^2 - \varphi_y^2\right)\varphi_{yy} + \left(c^2 - \varphi_z^2\right)\varphi_{zz} - \\ - 2\left(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_x\varphi_z\varphi_{xz} + \varphi_y\varphi_z\varphi_{yz}\right) = 0 \quad (114,2)$$

(нижние индексы обозначают здесь частные производные). В частности, для плоского движения

$$\left(c^2 - \varphi_x^2\right)\varphi_{xx} + \left(c^2 - \varphi_y^2\right)\varphi_{yy} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} = 0. \quad (114,3)$$

В этих уравнениях скорость звука сама должна быть выражена как функция скорости, что может быть, в принципе, сделано с помощью уравнения Бернулли $w + v^2/2 = \mathrm{const}$ и уравнения изэнтропичности $s = \mathrm{const}$ (для политропного газа зависимость c от v дается формулой (83,18)).

Уравнение (114,2) очень упрощается, если во всем пространстве скорость газа лишь незначительно отличается по величине и направлению от скорости натекающего из бесконечности потока[1]). Тем самым подразумевается и что ударные волны (если они вообще есть) обладают слабой интенсивностью, а потому не нарушают потенциальности течения.

Выделим из $\mathbf{v}$ постоянную скорость натекающего потока $\mathbf{v}_1$, написав $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'$, где $\mathbf{v}'$ — малая величина. Вместо потенциала φ полной скорости, введем потенциал φ' скорости $\mathbf{v}'$: $\mathbf{v}' = \nabla\varphi'$. Уравнение для этого потенциала получится из (114,2) заменой $\varphi = \varphi' + xv_1$ (ось x выбираем в направлении вектора $\mathbf{v}_1$). Рассматривая после этого φ' как малую величину и опуская все члены выше первого порядка, получим следующее линейное уравнение:

$$(1 - M_1^2)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2} = 0, \qquad (114,4)$$

где $M_1 = v_1/c_1$; для скорости звука здесь подставлено, естественно, ее заданное значение на бесконечности.

Давление в любой точке потока определяется в этом же приближении через скорость по формуле, которую можно получить следующим образом. Рассматривая p как функцию w (при заданном s) и учитывая, что $(\partial w/\partial p)_s = 1/\rho$, пишем:

$$p - p_1 \approx \left(\frac{\partial p}{\partial w}\right)_s (w - w_1) = \rho_1 (w - w_1).$$

Согласно же уравнению Бернулли имеем:

$$w - w_1 = -\frac{1}{2}\left[(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v})^2 - v_1^2\right] \approx -\frac{1}{2}\left(v_y^2 + v_z^2\right) - v_1 v_x,$$

так что

$$p - p_1 = -\rho_1 v_1 v_x - \frac{\rho_1}{2}\left(v_y^2 + v_z^2\right). \qquad (114,5)$$

В этом выражении надо, вообще говоря, сохранить член с квадратами поперечной скорости, так как в области вблизи оси x (в частности, на самой поверхности обтекаемого газом тонкого тела) производные $\partial\varphi'/\partial y$, $\partial\varphi'/\partial z$ могут стать большими по сравнению с $\partial\varphi'/\partial x$.

Уравнение (114,4), однако, неприменимо, если число M_1 очень близко к единице (околозвуковое движение), так что коэффициент в первом члене становится малым. Ясно, что в таком случае в уравнении должны быть сохранены также и члены более высокого порядка по производным потенциала по координате x. Для вывода соответствующего уравнения снова вернемся к исходному уравнению (114,2), которое после пренебрежения

[1]) С таким случаем мы встретились уже в § 113 (обтекание тонкого конуса) и встретимся еще при изучении обтекания сжимаемым газом произвольных тонких тел.

заведомо малыми членами сводится к следующему:

$$\left(1-\frac{\varphi_x^2}{c^2}\right)\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=0. \tag{114,6}$$

В рассматриваемом случае скорость $v_x \approx v$ и скорость звука c близки к критической скорости c_*. Поэтому можно написать:

$$c-c_*=(v-c_*)\left.\frac{dc}{dv}\right|_{v=c*},$$

или

$$c-v=(c_*-v)\left(1-\left.\frac{dc}{dv}\right|_{v=c*}\right).$$

Воспользовавшись тем, что при $v=c=c_*$ согласно (83,4) имеем $d\rho/dv=-\rho/c$, пишем (при $v=c_*$):

$$\frac{dc}{dv}=\frac{dc}{d\rho}\frac{d\rho}{dv}=-\frac{\rho}{c}\frac{dc}{d\rho}$$

так что

$$c-v=(c_*-v)\frac{1}{c}\frac{d(\rho c)}{d\rho}=\alpha_*(c_*-v). \tag{114,7}$$

Мы воспользовались здесь для производной $d(\rho c)/d\rho$ выражением (99,9), а α_* обозначает значение величины α (102,2) при $v=c_*$ (для политропного газа α есть просто постоянная, так что $\alpha_*=\alpha=(\gamma+1)/2$). С той же точностью это равенство можно переписать в виде

$$\frac{v}{c}-1=\alpha_*\left(\frac{v}{c_*}-1\right). \tag{114,8}$$

Это соотношение устанавливает в общем виде связь между числами M и M_* в околозвуковом случае.

С помощью этой формулы пишем:

$$1-\frac{v_x^2}{c^2}\approx 1-\frac{v^2}{c^2}\approx 2\left(1-\frac{v}{c}\right)\approx 2\alpha_*\left(1-\frac{v}{c_*}\right).$$

Наконец, вводим новый потенциал, производя замену

$$\varphi \to c_*(x+\varphi),$$

так что теперь будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{v_x}{c_*}-1,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{v_y}{c_*},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{v_z}{c_*}. \tag{114,9}$$

Внося все это в (114,6), получим окончательно следующее уравнение для потенциала околозвукового течения (с направлением скорости, везде близким к оси x):

$$2\alpha_*\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{114,10}$$

Свойства газа входят сюда только через постоянную α_*. Мы увидим в дальнейшем, что зависимость всех вообще свойств околозвукового течения от конкретного рода газа целиком определяется этой постоянной.

Линеаризованное уравнение (114,4) становится неприменимым и в другом предельном случае — очень больших значений M_1, не говоря уже о том, что благодаря возникновению сильных ударных волн реальное течение при таких M_1 фактически вообще нельзя считать потенциальным (см. § 127).

§ 115. Стационарные простые волны

Определим общий вид решений уравнений стационарного плоского сверхзвукового движения газа, описывающих течения, при которых на бесконечности имеется однородный плоско-параллельный поток, в дальнейшем своем течении поворачивающий, обтекая искривленный профиль. С частным случаем такого решения нам уже приходилось иметь дело при изучении движения вблизи угла, — при этом мы по существу рассматривали плоско-параллельный поток, текущий вдоль одной из сторон угла и поворачивающий вокруг края этого угла. В этом частном решении все величины — две компоненты скорости, давление, плотность — были функциями всего лишь от одной переменной — от угла φ. Поэтому каждая из этих величин могла бы быть выражена в виде функции одной из них. Поскольку это решение должно содержаться в виде частного случая в искомом общем решении, то естественно искать это последнее, исходя из требования, чтобы и в нем каждая из величин p, ρ, v_x, v_y (плоскость движения выбираем в качестве плоскости x, y) могла быть выражена в виде функции одной из них. Такое требование представляет собой, конечно, весьма существенное ограничение, налагаемое на решение уравнений движения, и получающееся таким образом решение отнюдь не является общим интегралом этих уравнений. В общем случае каждая из величин p, ρ, v_x, v_y, являющихся функцией двух координат x, y, могла бы быть выражена лишь через две из них.

Поскольку на бесконечности имеется однородный поток, в котором все величины, в частности и энтропия s, постоянны; а при стационарном движении идеальной жидкости энтропия сохраняется вдоль линий тока, то ясно, что и во всем пространстве будет $s = \mathrm{const}$, если только в газе нет ударных волн, что и предполагается ниже.

Уравнения Эйлера и уравнение непрерывности имеют вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0,$$