Свойства газа входят сюда только через постоянную α_*. Мы увидим в дальнейшем, что зависимость всех вообще свойств околозвукового течения от конкретного рода газа целиком определяется этой постоянной.

Линеаризованное уравнение (114,4) становится неприменимым и в другом предельном случае — очень больших значений M_1, не говоря уже о том, что благодаря возникновению сильных ударных волн реальное течение при таких M_1 фактически вообще нельзя считать потенциальным (см. § 127).

§ 115. Стационарные простые волны

Определим общий вид решений уравнений стационарного плоского сверхзвукового движения газа, описывающих течения, при которых на бесконечности имеется однородный плоско-параллельный поток, в дальнейшем своем течении поворачивающий, обтекая искривленный профиль. С частным случаем такого решения нам уже приходилось иметь дело при изучении движения вблизи угла, — при этом мы по существу рассматривали плоско-параллельный поток, текущий вдоль одной из сторон угла и поворачивающий вокруг края этого угла. В этом частном решении все величины — две компоненты скорости, давление, плотность — были функциями всего лишь от одной переменной — от угла φ. Поэтому каждая из этих величин могла бы быть выражена в виде функции одной из них. Поскольку это решение должно содержаться в виде частного случая в искомом общем решении, то естественно искать это последнее, исходя из требования, чтобы и в нем каждая из величин p, ρ, v_x, v_y (плоскость движения выбираем в качестве плоскости x, y) могла быть выражена в виде функции одной из них. Такое требование представляет собой, конечно, весьма существенное ограничение, налагаемое на решение уравнений движения, и получающееся таким образом решение отнюдь не является общим интегралом этих уравнений. В общем случае каждая из величин p, ρ, v_x, v_y, являющихся функцией двух координат x, y, могла бы быть выражена лишь через две из них.

Поскольку на бесконечности имеется однородный поток, в котором все величины, в частности и энтропия s, постоянны; а при стационарном движении идеальной жидкости энтропия сохраняется вдоль линий тока, то ясно, что и во всем пространстве будет $s = \text{const}$, если только в газе нет ударных волн, что и предполагается ниже.

Уравнения Эйлера и уравнение непрерывности имеют вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0,$$

Написав частные производные в виде якобианов, переписываем эти уравнения в виде

$$v_x \frac{\partial(v_x, y)}{\partial(x, y)} - v_y \frac{\partial(v_x, x)}{\partial(x, y)} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p, y)}{\partial(x, y)},$$

$$v_x \frac{\partial(v_y, y)}{\partial(x, y)} - v_y \frac{\partial(v_y, x)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(p, x)}{\partial(x, y)};$$

$$\frac{\partial(\rho v_x, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\rho v_y, x)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Выберем теперь в качестве независимых переменных x и p. Для того чтобы произвести соответствующее преобразование, достаточно умножить написанные уравнения на $\partial(x, y)/\partial(x, p)$, в результате чего получим уравнения в точности того же вида, с той лишь разницей, что в знаменателях всех якобианов будет стоять $\partial(x, p)$ вместо $\partial(x, y)$. Раскроем эти якобианы; при этом надо иметь в виду, что в независимых переменных x и p все величины ρ, v_x, v_y являются, по предположению, функциями только от p, и потому их частные производные по x равны нулю. Тогда получаем:

$$\left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{dv_x}{dp} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{dv_y}{dp} = -\frac{1}{\rho},$$

$$\left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{d\rho}{dp} + \rho\left(\frac{dv_y}{dp} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dv_x}{dp}\right) = 0$$

(где $\partial y/\partial x$ обозначает $(\partial y/\partial x)_p$). Все величины в этих уравнениях, за исключением лишь $\partial y/\partial x$, являются функциями только от p уже по сделанному предположению, а x вовсе не входит в уравнения явным образом. Поэтому прежде всего можно заключить на основании этих уравнений, что и $\partial y/\partial x$ есть некоторая функция только от p:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_p = f_1(p),$$

откуда

$$y = x f_1(p) + f_2(p), \tag{115,1}$$

где $f_2(p)$ — произвольная функция давления.

Дальнейших вычислений можно не производить вовсе, если непосредственно воспользоваться известным уже нам частным решением для волны разрежения при обтекании угла (§§ 109,112). Напомним, что в этом решении все величины (в том числе и давление) постоянны вдоль каждой прямой (характеристики), проходящей через вершину угла. Это частное решение, очевидно, соответствует случаю, когда в общем выражении (115,1) произвольная функция $f_2(p)$ тождественно равна нулю. Функция же $f_1(p)$ определяется полученными в § 109 формулами.

Уравнение (115,1) при постоянных значениях p определяет семейство прямых линий в плоскости x, y. Эти прямые пересекают в каждой своей точке линии тока под углом Маха. Это очевидно из того, что таким свойством обладают прямые $y = xf_1(p)$ в частном решении с $f_2 \equiv 0$. Таким образом, и в общем случае одно из семейств характеристик (характеристики, «исходящие» от поверхности тела) представляет собой прямые лучи, вдоль которых все величины остаются постоянными; эти прямые, однако, не имеют теперь общей точки пересечения.

Изложенные свойства рассматриваемого движения в математическом отношении полностью аналогичны свойствам одномерных простых волн, у которых одно из семейств характеристик представляет собой семейство прямых линий в плоскости x, t (см. §§ 101, 103, 104). Поэтому рассматриваемый класс течений играет в теории стационарного плоского (сверхзвукового) движения такую же роль, какую играют простые волны в теории нестационарного одномерного движения. Ввиду этой аналогии эти течения тоже называют простыми волнами. В частности, волну разрежения, соответствующую случаю $f_2 \equiv 0$, называют *центрированной простой волной.*

Как и в нестационарном случае, одно из важнейших свойств стационарных простых волн заключается в том, что течение во всякой области плоскости x, y, граничащей с областью однородного потока, есть простая волна (ср. § 104).

Покажем теперь, каким образом может быть построена простая волна для обтекания заданного профиля.

На рис. 115 изображен обтекаемый профиль; слева от точки O он прямолинеен, далее от точки O начинается закругление. В сверхзвуковом потоке влияние закругления распространяется, разумеется, лишь на область потока вниз по течению от исходящей из точки O характеристики OA. Поэтому все течение слева от этой характеристики будет представлять собой однородный поток (относящиеся к нему значения величин отличаем индексом 1). Все характеристики в этой области параллельны друг другу и наклонены к оси x под углом Маха $\alpha_1 = \arcsin(c_1/v_1)$.

В формулах (109, 12—15) угол наклона характеристик φ отсчитывается от луча, на котором $v = c = c_*$. Это значит (ср. § 112), что характеристике OA надо приписать значение угла φ, равное

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c_1}{c_*},$$

и в дальнейшем отсчитывать углы φ для всех характеристик от направления OA' (рис. 115). Угол наклона характеристик к оси x будет тогда равен $\varphi_* - \varphi$, где $\varphi_* = \alpha_1 + \varphi_1$. Согласно формулам (109,12—15) скорость и давление выразятся через угол φ

посредством

$$v_x = v\cos\theta, \qquad v_y = v\sin\theta, \tag{115,2}$$

$$v^2 = c_*^2\left[1 + \frac{2}{\gamma-1}\sin^2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\varphi\right], \tag{115,3}$$

$$\theta = \varphi_* - \varphi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\varphi\right), \tag{115,4}$$

$$p = p_*\left(\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\varphi\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \tag{115,5}$$

Уравнение же характеристик напишется в виде

$$y = x\operatorname{tg}(\varphi_* - \varphi) + F(\varphi). \tag{115,6}$$

Произвольная функция $F(\varphi)$ определится по заданной форме

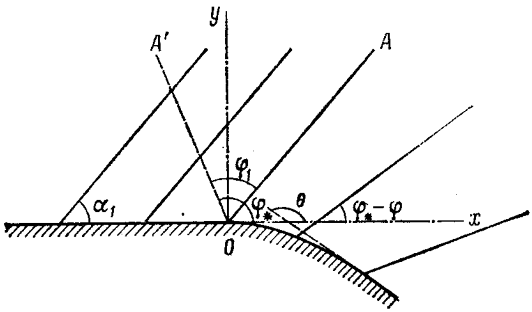

Рис. 115

профиля следующим образом. Пусть форма профиля задана уравнением $Y = Y(X)$, где X и Y — координаты его точек. На самой поверхности скорость газа направлена по касательной к ней, т. е.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dY}{dX}. \tag{115,7}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку X, Y и наклоненной под углом $\varphi_* - \varphi$ к оси x, есть

$$y - Y = (x - X)\operatorname{tg}(\varphi_* - \varphi).$$

Это уравнение совпадает с (115,6), если в последнем положить

$$F(\varphi) = Y - X\operatorname{tg}(\varphi_* - \varphi). \tag{115,8}$$

Исходя из заданного уравнения $Y = Y(X)$ и уравнения (115,7), представляем форму профиля в виде параметрических уравнений $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$, где параметром является угол θ наклона касательной к профилю. Подставляя сюда θ, выраженное через φ согласно (115,4), получаем X и Y в виде функций от φ;

наконец, подставляя их в (115,8), получим искомую функцию $F(\varphi)$.

При обтекании выпуклой поверхности угол θ наклона вектора скорости к оси x уменьшается вниз по течению (рис. 115). Вместе с ним монотонно убывает также и угол $\varphi_* - \varphi$ наклона характеристик (речь идет везде о характеристиках, исходящих от тела). Благодаря этому характеристики нигде (в области течения) не пересекаются друг с другом. Таким образом, в области вниз по течению от характеристики OA, которая будет представлять собой слабый разрыв, мы будем иметь непрерывный (без ударных волн) монотонно разрежающийся поток.

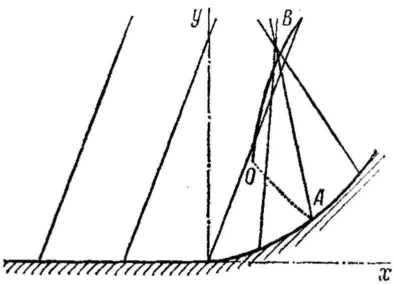

Рис. 116

Иначе обстоит дело при обтекании вогнутого профиля. Здесь наклон θ касательной к профилю, а с ним и наклон характеристик возрастают в направлении течения. В результате характеристики пересекаются друг с другом (в области течения). Но на различных не параллельных друг другу характеристиках все величины (скорость, давление и т. п.) имеют различные значения. Поэтому в точках пересечения характеристик все эти функции оказываются многозначными, что физически нелепо. Аналогичное явление мы имели уже в нестационарной одномерной простой волне сжатия (§ 101). Как и там, оно означает здесь, что в действительности возникает ударная волна. Положение этого разрыва не может быть определено полностью из рассматриваемого решения, выведенного в предположении его отсутствия. Единственное, что может быть определено, — это место начала ударной волны (точка O на рис. 116; ударная волна изображена сплошной линией OB). Она определяется как точка пересечения характеристик, лежащая на наиболее близкой к поверхности тела линии тока. На линиях тока, проходящих под точкой O (ближе к телу), решение везде однозначно; в точке же O начинается его многозначность. Уравнения, определяющие координаты x_0, y_0 этой точки, могут быть получены аналогично тому, как были найдены соответствующие уравнения для определения момента и места образования разрыва в одномерной нестационарной простой волне. Если рассматривать угол наклона характеристик как функцию координат x и y точек, через которые они проходят, то при значениях x и y, превышающих некоторые определенные x_0, y_0, эта функция делается многозначной. В § 101 мы имели аналогичное положение для функции $v(x, t)$; поэтому, не повторяя заново всех рассуждений, напишем сразу уравнения

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_x = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right)_x = 0, \tag{115,9}$$

определяющие здесь место начала ударной волны. В математическом отношении это — угловая точка огибающей семейства прямолинейных характеристик (ср. § 103).

Что касается области существования простой волны при обтекании вогнутого профиля, то вдоль линий тока, проходящих над точкой O, оно применимо вплоть до места пересечения этих линий с ударной волной. Линии же тока, проходящие под точкой O, с ударной волной вообще не пересекаются. Однако отсюда нельзя сделать заключение о том, что вдоль них рассматриваемое решение применимо везде. Дело в том, что возникающая ударная волна оказывает возмущающее влияние и на газ, текущий вдоль этих линий тока, и таким образом нарушает движение, которое должно было бы иметь место в ее отсутствии. В силу свойства сверхзвукового потока эти возмущения будут, однако, проникать лишь в область газа, находящуюся вниз по течению от характеристики OA, исходящей из точки начала ударной волны (одна из характеристик второго семейства). Таким образом, рассматриваемое здесь решение будет применимым во всей области слева от линии AOB. Что касается самой линии OA, то она будет представлять собой слабый разрыв. Мы видим, что непрерывная (без ударных волн) во всей области простая волна сжатия вдоль вогнутой поверхности, аналогичная простой волне разрежения вдоль выпуклой поверхности, невозможна.

В ударной волне, возникающей при обтекании вогнутого профиля, мы имеем пример волны, «начинающейся» от некоторой точки, расположенной в самом потоке вдали от твердых стенок. Такая точка «начала» ударной волны обладает некоторыми общими свойствами, которые мы здесь отметим. В самой точке начала интенсивность ударной волны обращается в нуль, а вблизи нее мала. Но в ударной волне слабой интенсивности скачок энтропии и ротора скорости — величины третьего порядка малости, и потому изменение течения при прохождении через волну отличается от непрерывного потенциального изэнтропического изменения лишь в величинах третьего порядка. Отсюда следует, что в отходящих от точки начала ударной волны слабых разрывах должны испытывать скачок лишь производные третьего порядка от различных величин. Таких разрывов будет, вообще говоря, два: слабый разрыв, совпадающий с характеристикой, и тангенциальный слабый разрыв, совпадающий с линией тока (см. конец § 96).