§ 116. Уравнение Чаплыгина (общая задача о двухмерном стационарном движении сжимаемого газа)

Рассмотрев стационарные простые волны, перейдем теперь к общей задаче о произвольном стационарном плоском потенциальном движении. Говоря о потенциальном течении, мы подразумеваем, что движение изэнтропично и что в нем отсутствуют ударные волны.

Оказывается возможным свести поставленную задачу к решению всего одного линейного уравнения в частных производных (*С. А. Чаплыгин*, 1902). Это осуществляется путем преобразования к новым независимым переменным — компонентам скорости v_x, v_y (это преобразование часто называют *преобразованием годографа*; плоскость переменных v_x, v_y называют при этом плоскостью годографа, а плоскость x, y — физической плоскостью).

Для потенциального движения вместо уравнений Эйлера можно написать сразу их первый интеграл, т. е. уравнение Бернулли:

$$w+\frac{v^2}{2}=w_0. \tag{116,1}$$

Уравнение непрерывности гласит:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)=0. \tag{116,2}$$

Для дифференциала потенциала φ скорости имеем:

$$d\varphi=v_x\,dx+v_y\,dy.$$

Произведем преобразование от независимых переменных x, y к независимым переменным v_x, v_y путем преобразования Лежандра. Для этого пишем:

$$d\varphi=d(xv_x)-x\,dv_x+d(yv_y)-y\,dv_y.$$

Вводя функцию

$$\Phi=-\varphi+xv_x+yv_y, \tag{116,3}$$

получаем:

$$d\Phi=x\,dv_x+y\,dv_y,$$

где Φ рассматривается как функция от v_x и v_y. Отсюда имеем:

$$x=\frac{\partial\Phi}{\partial v_x},\qquad y=\frac{\partial\Phi}{\partial v_y}. \tag{116,4}$$

Удобнее, однако, пользоваться не декартовыми компонентами скорости, а ее абсолютной величиной v и углом θ, образуемым ею с осью x:

$$v_x=v\cos\theta,\qquad v_y=v\sin\theta. \tag{116,5}$$

Произведя соответствующее преобразование производных, легко получаем вместо (116,4) следующие соотношения:

$$x = \cos\theta \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\sin\theta}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad y = \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\cos\theta}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \qquad (116,6)$$

Связь между потенциалом φ и функцией Φ дается при этом простой формулой

$$\varphi = -\Phi + v \frac{\partial \Phi}{\partial v}. \qquad (116,7)$$

Наконец, для того чтобы получить уравнение, определяющее функцию $\Phi(v, \theta)$, надо преобразовать к новым переменным уравнение непрерывности (116,2). Написав производные в виде якобианов:

$$\frac{\partial(\rho v_x, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\rho v_y, x)}{\partial(x, y)} = 0,$$

умножив на $\partial(x, y)/\partial(v, \theta)$ и подставив (116,5), имеем:

$$\frac{\partial(\rho v \cos\theta, y)}{\partial(v, \theta)} - \frac{\partial(\rho v \sin\theta, x)}{\partial(v, \theta)} = 0.$$

При раскрытии этих якобианов надо подставить для x и y выражения (116,6). Кроме того, поскольку энтропия s является заданной постоянной величиной, то, выразив плотность в виде функции от s и w и подставив для w выражение $w = w_0 - v^2/2$, мы найдем, что плотность может быть написана в виде функции только от скорости: $\rho = \rho(v)$. Имея всё это в виду, получим после простых преобразований следующее уравнение:

$$\frac{d(\rho v)}{dv} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + \rho v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0.$$

Согласно (83,5) имеем:

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

и в результате получим окончательно для функции $\Phi(v, \theta)$ следующее *уравнение Чаплыгина*:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + v \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0. \qquad (116,8)$$

Здесь скорость звука является заданной функцией скорости, $c = c(v)$, определяемой уравнением состояния газа и уравнением Бернулли.

Уравнение (116,8) вместе с соотношениями (116,6) заменяет собой уравнения движения. Таким образом, задача о решении нелинейных уравнений движения сводится к решению линейного уравнения для функции $\Phi(v, \theta)$. Правда, нелинейными оказываются зато граничные условия для этого уравнения. Эти условия заключаются в следующем. На поверхности обтекаемого тела скорость газа направлена по касательной к ней. Выразив координаты уравнения поверхности в виде параметрических уравнений $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$ (как это было объяснено в предыдущем параграфе) и подставив X и Y в (116,6) вместо x и y, мы получим два уравнения, которые должны удовлетворяться при всех значениях θ, что возможно отнюдь не при всякой функции $\Phi(v, \theta)$. Граничное условие как раз и будет заключаться в требовании, чтобы оба эти уравнения были совместными при всех θ, т. е. одно из них должно быть автоматическим следствием другого.

Удовлетворения граничных условий, однако, еще не достаточно для того, чтобы гарантировать пригодность полученного решения уравнения Чаплыгина для определения реального течения во всей области движения в физической плоскости. Необходимо еще выполнение следующего требования: якобиан

$$\Delta = \frac{\partial (x, y)}{\partial (\theta, v)}$$

нигде не должен менять знак, проходя через нуль (за исключением лишь тривиального случая, когда обращаются в нуль все четыре составляющие его производные). Легко видеть, что если это условие нарушается, то при прохождении через определенную равенством $\Delta = 0$ (так называемую *предельную*) линию в плоскости x, y решение, вообще говоря, становится комплексным[1]). Действительно, пусть на линии $v = v_0(\theta)$ имеем $\Delta = 0$ и пусть при этом $(\partial y/\partial\theta)_v \neq 0$. Тогда имеем:

$$-\Delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_v = \frac{\partial (x, y)}{\partial (v, \theta)} \frac{\partial (v, \theta)}{\partial (v, y)} = \frac{\partial (x, y)}{\partial (v, y)} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_y = 0.$$

Отсюда видно, что вблизи предельной линии v как функция от x (при заданном y) определяется уравнением вида

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_y (v - v_0)^2,$$

и по одну из сторон от предельной линии v становится комплексной[2]).

[1]) Прохождение же через нуль путем обращения Δ в бесконечность не запрещается. Если на некоторой линии $1/\Delta = 0$, то это приводит лишь к тому, что соответствие между плоскостями x, y и v, θ становится не взаимно однозначным в том смысле, что при обходе плоскости x, y некоторая часть плоскости v, θ проходится дважды или трижды.

[2]) Это утверждение остается, очевидно, справедливым и в тех случаях, когда одновременно с Δ обращается в нуль и $(\partial^2 x/\partial v^2)_y$, но производная $(\partial x/\partial v)_y$ по-прежнему меняет знак при $v = v_0$, т. е. разность $x - x_0$ пропорциональна более высокой четной степени $v - v_0$.

Легко видеть, что предельная линия может появиться лишь в областях сверхзвукового движения. Непосредственное вычисление с использованием соотношений (116,6) и уравнения (116,8) дает

$$\Delta = \frac{1}{v}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\,\partial v} - \frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)^2\right]. \qquad (116,9)$$

Ясно, что при $v \leqslant c$ всегда $\Delta > 0$, и лишь при $v > c$ Δ может изменить знак, пройдя через нуль.

Появление в решении уравнения Чаплыгина предельных линий свидетельствует о том, что в данных конкретных условиях невозможен непрерывный во всей области движения режим обтекания, и в потоке должны возникать ударные волны. Следует, однако, подчеркнуть, что положение этих волн отнюдь не совпадает с предельными линиями.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели частный случай сверхзвукового стационарного двухмерного течения (простую волну), характерный тем, что в нем величина скорости является функцией только ее направления: $v = v(\theta)$. Это решение не могло бы быть получено из уравнения Чаплыгина; для него тождественно $1/\Delta \equiv 0$, и оно теряется, когда при преобразовании к плоскости годографа приходится умножать уравнение движения (уравнение непрерывности) на якобиан Δ. Положение здесь аналогично тому, что мы имели в теории одномерного нестационарного движения. Все сказанное в § 105 о взаимоотношении между простой волной и общим интегралом уравнения (105,2) полностью относится и ко взаимоотношению между стационарной простой волной и общим интегралом уравнения Чаплыгина.

Положительность якобиана Δ при дозвуковом движении позволяет установить определенное правило, относящееся к направлению поворота скорости вдоль потока (*А. А. Никольский, Г. И. Таганов*, 1946). Имеем тождественно

$$\frac{1}{\Delta} \equiv \frac{\partial(\theta, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\theta, v)}{\partial(x, v)}\frac{\partial(x, v)}{\partial(x, y)},$$

или

$$\frac{1}{\Delta} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x. \qquad (116,10)$$

В дозвуковом потоке $\Delta > 0$, и мы видим, что производные $(\partial\theta/\partial x)_v$ и $(\partial v/\partial y)_x$ имеют одинаковый знак. Этот результат имеет простой геометрический смысл: если передвигаться вдоль линии $v = \text{const} \equiv v_0$ так, чтобы область $v < v_0$ лежала справа, то угол θ будет монотонно возрастать, т. е. вектор скорости монотонно поворачивается против часовой стрелки. Этот результат относится, в частности, и к линии перехода из до- в сверхзвуковое течение, вдоль которой $v = c = c_*$.

В заключение выпишем уравнение Чаплыгина для политропного газа выразив в нем в явном виде c через v:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+v^2\frac{1-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\dfrac{v^2}{c_*^2}}{1-\dfrac{v^2}{c_*^2}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}+v\frac{\partial\Phi}{\partial v}=0. \qquad (116,11)$$

Это уравнение обладает семейством частных интегралов, выражающихся через гипергеометрические функции[1]).

§ 117. Характеристики плоского стационарного течения

Некоторые общие свойства характеристик плоского стационарного (сверхзвукового) движения были рассмотрены уже в § 82. Выведем теперь уравнения, определяющие эти линии по заданному решению уравнений движения.

В плоском стационарном сверхзвуковом потоке имеется в общем случае три семейства характеристик. По двум из них (которые мы будем называть характеристиками C_+ и C_-) распространяются все малые возмущения, за исключением лишь возмущений энетропии и ротора скорости; последние распространяются по характеристикам третьего семейства C_0, совпадающим с линиями тока. Для заданного течения линии тока известны, и вопрос заключается в определении характеристик первых двух семейств.

Направления проходящих через каждую точку плоскости характеристик C_+ и C_- расположены по обе стороны от проходящей через ту же точку линии тока и образуют с ней угол, равный местному значению угла возмущений α (рис. 51). Обозначим посредством m_0 тангенс угла наклона к оси (угловой коэффициент) линии тока в данной ее точке, а посредством m_+ и m_- — угловые коэффициенты характеристик C_+ и C_-. Тогда по формуле сложения тангенсов напишем:

$$\frac{m_+-m_0}{1+m_0m_+}=\operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{m_--m_0}{1+m_0m_-}=-\operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$m_\pm=\frac{m_0\pm\operatorname{tg}\alpha}{1\mp m_0\operatorname{tg}\alpha}$$

(верхние знаки относятся везде к C_+, а нижние — к C_-). Подставив сюда

$$m_0=\frac{v_y}{v_x}, \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{c}{\sqrt{v^2-c^2}}$$

[1]) См., например, *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966, гл. X; *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. — М.: ИЛ, 1961, § 20.