В заключение выпишем уравнение Чаплыгина для политропного газа выразив в нем в явном виде c через v:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+v^2\frac{1-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\dfrac{v^2}{c_*^2}}{1-\dfrac{v^2}{c_*^2}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}+v\frac{\partial\Phi}{\partial v}=0. \tag{116,11}$$

Это уравнение обладает семейством частных интегралов, выражающихся через гипергеометрические функции[1]).

§ 117. Характеристики плоского стационарного течения

Некоторые общие свойства характеристик плоского стационарного (сверхзвукового) движения были рассмотрены уже в § 82. Выведем теперь уравнения, определяющие эти линии по заданному решению уравнений движения.

В плоском стационарном сверхзвуковом потоке имеется в общем случае три семейства характеристик. По двум из них (которые мы будем называть характеристиками C_+ и C_-) распространяются все малые возмущения, за исключением лишь возмущений энтропии и ротора скорости; последние распространяются по характеристикам третьего семейства C_0, совпадающим с линиями тока. Для заданного течения линии тока известны, и вопрос заключается в определении характеристик первых двух семейств.

Направления проходящих через каждую точку плоскости характеристик C_+ и C_- расположены по обе стороны от проходящей через ту же точку линии тока и образуют с ней угол, равный местному значению угла возмущений α (рис. 51). Обозначим посредством m_0 тангенс угла наклона к оси (угловой коэффициент) линии тока в данной ее точке, а посредством m_+ и m_- — угловые коэффициенты характеристик C_+ и C_-. Тогда по формуле сложения тангенсов напишем:

$$\frac{m_+-m_0}{1+m_0m_+}=\operatorname{tg}\alpha,\qquad \frac{m_--m_0}{1+m_0m_-}=-\operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$m_\pm=\frac{m_0\pm\operatorname{tg}\alpha}{1\mp m_0\operatorname{tg}\alpha}$$

(верхние знаки относятся везде к C_+, а нижние — к C_-). Подставив сюда

$$m_0=\frac{v_y}{v_x},\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{c}{\sqrt{v^2-c^2}}$$

[1]) См., например, *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966, гл. X; *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. — М.: ИЛ, 1961, § 20.

и произведя сокращения, получим следующее выражение для угловых коэффициентов характеристик:

$$m_{\pm} \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm} = \frac{v_x v_y \pm c\sqrt{v^2 - c^2}}{v_x^2 - c^2}. \qquad (117,1)$$

Если распределение скоростей в потоке известно, то это есть дифференциальное уравнение, определяющее характеристики C_+ и C_-[1]).

Наряду с характеристиками в плоскости x, y можно рассматривать также и характеристики в плоскости годографа, в особенности полезные при изучении изэнтропического потенциального течения, о котором мы и будем ниже говорить. С математической точки зрения это — характеристики уравнения Чаплыгина (116,8) (принадлежащего при $v > c$ к гиперболическому типу). Следуя известному из математической физики общему методу (см. § 103), с помощью коэффициентов этого уравнения составляем уравнение характеристик:

$$dv^2 + d\theta^2 \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,$$

или

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)_{\pm} = \pm \frac{1}{v}\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}. \qquad (117,2)$$

Определяемые этим уравнением характеристики не зависят от конкретного решения уравнения Чаплыгина, что связано с независимостью коэффициентов последнего от Φ. Характеристики в плоскости годографа, являющиеся отображением характеристик C_+ и C_- в физической плоскости, мы будем условно называть соответственно характеристиками Γ_+ и Γ_- (знаки в (117,2) соответствуют этому условию).

Интегрирование уравнения (117,2) дает соотношения вида $J_+(v, \theta) = \text{const}$, $J_-(v, \theta) = \text{const}$. Функции J_+ и J_- представляют собой величины, остающиеся постоянными соответственно вдоль характеристик C_+ и C_- (инварианты Римана). Для политропного газа уравнение (117,2) может быть проинтегрировано в явном виде. Нет, однако, необходимости производить эти вычисления заново, так как результат может быть написан заранее с помощью формул (115,3—4). Действительно, согласно общим свойствам простых волн (см. § 104) зависимость v от θ в простой волне как раз и определяется условием постоянства во всем про-

---

[1]) Уравнение (117,1) определяет характеристики и для стационарного осесимметрического течения, если только заменить v_y и y на v_r и r, где r — цилиндрическая координата (расстояние от оси симметрии — оси x); ясно, что весь вывод не изменится, если вместо плоскости x, y рассматривать проходящую через ось симметрии плоскость x, r.

странстве одного из инвариантов Римана. Произвольной постоянной в формулах (115,3) и (115,4) является φ_*; исключая из этих формул параметр φ, получим:

$$J_\pm = \theta \pm \left\{ \arcsin \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\left(1 - \frac{c_*^2}{v^2}\right)} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arcsin \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{v^2}{c_*^2} - 1\right)} \right\}. \qquad (117,3)$$

Характеристики в плоскости годографа представляют собой семейство эпициклоид, заполняющих пространство между двумя окружностями радиусов (рис. 117):

$$v = c_* \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\, c_*.$$

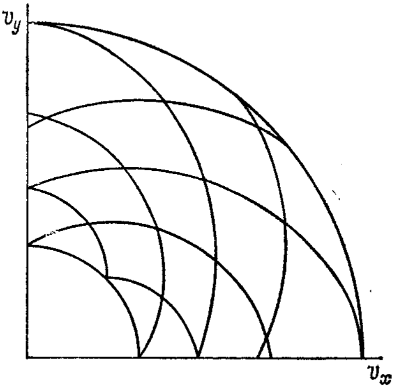

Рис. 117

Для изэнтропического потенциального движения характеристики Γ_+, Γ_- обладают следующим важным свойством: семейства характеристик Γ_+ и Γ_- ортогональны соответственно характеристикам C_- и C_+ (предполагается, что оси координат x, y изображены параллельными осям v_x, v_y)[1].

Для доказательства этого утверждения исходим из уравнения (114,3) для потенциала плоского течения, имеющего вид

$$A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (117,4)$$

(существенно, что в нем отсутствует свободный член).

Угловые коэффициенты $m_\pm$ характеристик $C_\pm$ определяются как корни квадратного уравнения

$$Am^2 - 2Bm + C = 0.$$

Рассмотрим выражение $dv_x^+\,dx^- + dv_y^+\,dy^-$, в котором дифференциалы скорости берутся вдоль характеристики Γ_+, а дифференциалы координат — вдоль C_-. Имеем тождественно:

$$dv_x^+\,dx^- + dv_y^+\,dy^- =$$
$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx^+\,dx^- + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}(dx^+\,dy^- + dx^-\,dy^+) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,dy^+\,dy^-.$$

[1]) Это утверждение не относится к характеристикам осесимметрического движения в плоскости x, r!

Разделив это выражение на dx^+dx^-, получим в качестве коэффициентов при $\partial^2\varphi/\partial x\,\partial y$ и $\partial^2\varphi/\partial y^2$ соответственно $m_+ + m_- = 2B/A$ и $m_+m_- = C/A$, после чего ясно, что в силу уравнения (117,4) выражение обращается в нуль. Таким образом,

$$dv_x^+\,dx^- + dv_y^+\,dy^- = d\mathbf{v}^+\,d\mathbf{r}^- = 0.$$

Аналогично получим:

$$d\mathbf{v}^- d\mathbf{r}^+ = 0.$$

Эти равенства и выражают собой сделанное выше утверждение.

§ 118. Уравнение Эйлера — Трикоми. Переход через звуковую скорость

Существенный принципиальный интерес имеет исследование особенностей течения, возникающих при переходе из до- в сверхзвуковую область, или обратно. Стационарные течения, сопровождающиеся таким переходом, называются *смешанными* или *трансзвуковыми*, а самую границу перехода называют *переходной* или *звуковой поверхностью.*

Для исследования течения вблизи границы перехода в особенности удобно уравнение Чаплыгина, сильно упрощающееся в этой области.

На границе перехода $v = c = c_*$, а вблизи нее (в *околозвуковой* области) разности $v - c_*$ и $c - c_*$ малы и связаны друг с другом соотношением (114,8):

$$\frac{v}{c} - 1 = \alpha_*\left(\frac{v}{c_*} - 1\right).$$

Произведем соответствующие упрощения в уравнении Чаплыгина. Третий член уравнения (116,8) мал по сравнению со вторым, содержащим $1 - v^2/c^2$ в знаменателе. Во втором же члене полагаем приближенно

$$\frac{v^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{c_*^2}{2(1 - v/c)} = \frac{c_*}{2\alpha_*(1 - v/c_*)}.$$

Наконец, вводя вместо скорости v новую переменную

$$\eta = (2\alpha_*)^{1/3}\frac{v - c_*}{c_*}, \tag{118,1}$$

получим искомое уравнение в виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} - \eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0. \tag{118,2}$$

Уравнение такого вида в математической физике называется *уравнением Эйлера — Трикоми* [1]). В полуплоскости $\eta > 0$ оно от-

[1]) К рассматриваемой газодинамической проблеме уравнение Трикоми было привлечено *Ф. И. Франклем* (1945).