Разделив это выражение на dx^+dx^-, получим в качестве коэффициентов при $\partial^2\varphi/\partial x\,\partial y$ и $\partial^2\varphi/\partial y^2$ соответственно $m_+ + m_- = 2B/A$ и $m_+m_- = C/A$, после чего ясно, что в силу уравнения (117,4) выражение обращается в нуль. Таким образом,

$$dv_x^+\,dx^- + dv_y^+\,dy^- = d\mathbf{v}^+\,d\mathbf{r}^- = 0.$$

Аналогично получим:

$$d\mathbf{v}^-d\mathbf{r}^+ = 0.$$

Эти равенства и выражают собой сделанное выше утверждение.

§ 118. Уравнение Эйлера — Трикоми. Переход через звуковую скорость

Существенный принципиальный интерес имеет исследование особенностей течения, возникающих при переходе из до- в сверхзвуковую область, или обратно. Стационарные течения, сопровождающиеся таким переходом, называются *смешанными* или *трансзвуковыми*, а самую границу перехода называют *переходной* или *звуковой поверхностью.*

Для исследования течения вблизи границы перехода в особенности удобно уравнение Чаплыгина, сильно упрощающееся в этой области.

На границе перехода $v = c = c_*$, а вблизи нее (в *околозвуковой* области) разности $v - c_*$ и $c - c_*$ малы и связаны друг с другом соотношением (114,8):

$$\frac{v}{c} - 1 = \alpha_*\left(\frac{v}{c_*} - 1\right).$$

Произведем соответствующие упрощения в уравнении Чаплыгина. Третий член уравнения (116,8) мал по сравнению со вторым, содержащим $1 - v^2/c^2$ в знаменателе. Во втором же члене полагаем приближенно

$$\frac{v^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{c_*^2}{2(1 - v/c)} = \frac{c_*}{2\alpha_*(1 - v/c_*)}.$$

Наконец, вводя вместо скорости v новую переменную

$$\eta = (2\alpha_*)^{1/3}\frac{v - c_*}{c_*}, \tag{118,1}$$

получим искомое уравнение в виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} - \eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0. \tag{118,2}$$

Уравнение такого вида в математической физике называется *уравнением Эйлера — Трикоми* [1]). В полуплоскости $\eta > 0$ оно от-

[1]) К рассматриваемой газодинамической проблеме уравнение Трикоми было привлечено *Ф. И. Франклем* (1945).

носится к гиперболическому, а в полуплоскости $\eta < 0$ — к эллиптическому типу. Мы рассмотрим здесь ряд чисто математических свойств этого уравнения, которые существенны для исследования тех или иных конкретных физических случаев.

Характеристики уравнения (118,2) определяются уравнением

$$\eta\, d\eta^2 - d\theta^2 = 0,$$

имеющим общий интеграл:

$$\theta \pm \frac{2}{3}\eta^{3/2} = C, \tag{118,3}$$

где C — произвольная постоянная. Это уравнение изображает в плоскости η, θ два семейства характеристик, представляющих собой ветви полукубических парабол, расположенных в правой полуплоскости с точками возврата на оси θ (рис. 118).

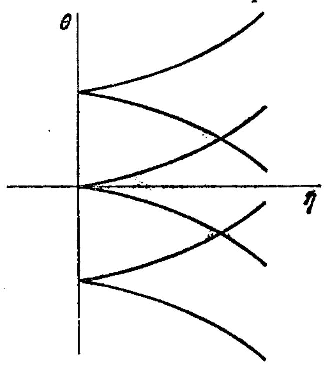
Рис. 118

При исследовании движения в небольшой области пространства, в которой направление скорости газа меняется незначительно [1]), всегда можно выбрать направление оси x так, чтобы отсчитываемый от нее угол θ во всей рассматриваемой области был малым. Тогда сильно упрощаются также и уравнения (116,6), определяющие координаты x, y по функции $\Phi(\eta, \theta)$ [2]):

$$x = (2\alpha_*)^{1/3}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \qquad y = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}.$$

Для того чтобы избежать появления в формулах лишнего множителя $(2\alpha_*)^{1/3}$, мы будем ниже, в §§ 118—121, пользоваться вместо координаты x величиной $x(2\alpha_*)^{-1/3}$, обозначая ее той же буквой x. Тогда

$$x = \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \qquad y = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}. \tag{118,4}$$

Полезно заметить, что ввиду такой простой связи с Φ функция $y(\eta, \theta)$ (но не $x(\eta, \theta)$) тоже удовлетворяет уравнению Эйлера — Трикоми. Имея это в виду, можно написать якобиан пре-

[1]) Слова «небольшая область» не следует, разумеется, понимать буквально. Речь может идти и об исследовании окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. о течении на достаточно больших расстояниях от обтекаемого тела.

[2]) Мы опустили в правых сторонах равенства множители $1/c_*$; это означает лишь замену функции Φ на $c_*\Phi$, не меняющую уравнения (118,2) и потому всегда допустимую.

образования из физической плоскости в плоскость годографа в виде

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \eta)} = \Phi_{\eta\theta}^2 - \Phi_{\eta\eta}\Phi_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 - \eta\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2. \quad (118{,}5)$$

Как уже сказано, уравнение Эйлера — Трикоми приходится обычно применять для исследования свойств решения в окрестности начала координат в плоскости η, θ. В физически интересных случаях эта точка представляет собой особую точку решения. В связи с этим особое значение приобретает семейство частных интегралов уравнения Эйлера — Трикоми, обладающих определенными свойствами однородности. Именно, речь идет о решениях, однородных по отношению к переменным θ^2 и η^3; такие решения должны существовать, поскольку преобразование $\theta^2 \to a\theta^2$, $\eta^3 \to a\eta^3$ оставляет инвариантным уравнение (118,2). Будем искать эти решения в виде

$$\Phi = \theta^{2k} f(\xi), \qquad \xi = 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2},$$

где k — постоянная (степень однородности функции Φ по отношению к указанному преобразованию). Переменную ξ мы выбрали такой, что она обращается в нуль на характеристиках, проходящих через точку $\eta = \theta = 0$. Сделав подстановку, получим для функции $f(\xi)$ уравнение

$$\xi(1-\xi)f'' + \left[\frac{5}{6} - 2k - \xi\left(\frac{3}{2} - 2k\right)\right]f' - k\left(k - \frac{1}{2}\right)f = 0.$$

Это — частный случай гипергеометрического уравнения. С помощью известного выражения для двух независимых интегралов гипергеометрического уравнения находим искомое решение (при нецелом числе $2k + 1/6$) в виде

$$\Phi_k = \theta^{2k}\left[AF\left(-k,\ -k+\frac{1}{2},\ -2k+\frac{5}{6};\ 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) + \right.$$
$$\left. + B\left(1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{2k+1/6} F\left(k+\frac{1}{6},\ k+\frac{2}{3},\ 2k+\frac{7}{6};\ 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\right]. \quad (118{,}6)$$

С помощью известных соотношений между гипергеометрическими функциями от аргументов z, $\frac{1}{z}$, $1 - z$, $\frac{1}{1-z}$, $\frac{z}{1-z}$ можно представить это решение еще в пяти других видах; при исследовании различных конкретных случаев приходится пользоваться всеми этими видами[1]. Мы приведем здесь лишь следующие два

[1]) Соответствующие формулы можно найти, например, в §е Математического приложения в III. Пользуемся случаем исправить опечатку в формуле (е, 9) этого параграфа: во втором члене должен стоять множитель $z^{\beta-\gamma}$ (вместо $z^{\alpha-\gamma}$).

вида:

$$\Phi_k=\theta^{2k}\left[AF\left(-k,\ -k+\frac{1}{2},\ \frac{2}{3};\ \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)+\right.$$
$$\left.+B\frac{\eta}{\theta^{2/3}}F\left(-k+\frac{1}{3},\ -k+\frac{5}{6},\ \frac{4}{3};\ \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\right], \qquad (118,7)$$

$$\Phi_k=\eta^{3k}\left[AF\left(-k,\ -k+\frac{1}{3},\ \frac{1}{2};\ \frac{9\theta^2}{4\eta^3}\right)+\right.$$
$$\left.+B\frac{\theta}{\eta^{3/2}}F\left(-k+\frac{1}{2},\ -k+\frac{5}{6},\ \frac{3}{2};\ \frac{9\theta^2}{4\eta^3}\right)\right] \qquad (118,8)$$

(постоянные A, B в формулах (118,6—8), конечно, не совпадают). Из этих выражений сразу следует важное свойство функций Φ_k, не видное непосредственно из выражения (118,6): линии $\eta=0$ и $\theta=0$ не являются их особыми линиями (из (118,7) видно, что вблизи $\eta=0$ Φ_k разлагается по целым степеням η, а из (118,8) — то же самое по θ). Из выражения же (118,6) видно, что характеристики, напротив, являются особыми линиями общего (т. е. содержащего обе постоянные A и B) однородного интеграла Φ_k уравнения Эйлера — Трикоми: при нецелом $2k+1/6$ точками разветвления обладает множитель $(9\theta^2-4\eta^3)^{2k+1/6}$, а при целом $2k+1/6$ один из членов в (118,6) вообще теряет смысл[1]) (либо при $2k+1/6=0$ совпадает с другим) и должен быть заменен вторым независимым решением гипергеометрического уравнения, имеющим, как известно, в этом случае логарифмическую особенность.

Между интегралами Φ_k с различными значениями k имеются следующие соотношения:

$$\Phi_k=\Phi_{-k-1/6}(9\theta^2-4\eta^3)^{2k+1/6}, \qquad (118,9)$$

$$\Phi_{k-1/2}=\frac{\partial\Phi_k}{\partial\theta}. \qquad (118,10)$$

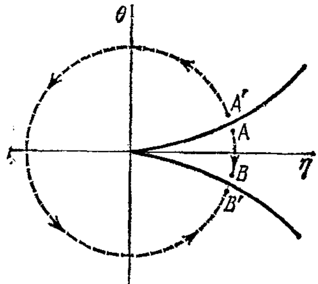

Рис. 119

Первое следует непосредственно из выражения (118,6), а второе — из того, что функция $\partial\Phi_k/\partial\theta$ удовлетворяет уравнению Эйлера — Трикоми и имеет ту же степень однородности, что и $\Phi_{k-1/2}$. В этих формулах под Φ_k подразумевается, конечно, общее выражение с двумя произвольными постоянными.

При исследовании решения в окрестности точки $\eta=\theta=0$ приходится следить за его изменением при обходе вокруг этой точки. Пусть, например, функция Φ_k (118,6) изображает решение в точке A вблизи характеристики $\theta={}^2/_3\eta^{3/2}$ (рис. 119) и требуется найти форму решения вблизи характеристики $\theta=$

[1]) Напомним, что ряд $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)$ при $\gamma=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ теряет смысл.

$=-{}^2/_3\eta^{3/2}$ (в точке B). Переход вдоль AB связан с пересечением оси абсцисс; между тем значение $\theta=0$ есть особая точка гипергеометрических функций в выражении (118,6), так как их аргумент обращается в бесконечность. Поэтому для совершения перехода необходимо сначала применить к гипергеометрическим функциям преобразование, переводящее их в функции обратного аргумента $\left(\frac{9\theta^2}{9\theta^2-4\eta^3}\right)$, для которых $\theta=0$ уже не будет особой точкой, после чего меняем знак θ и повторным таким же преобразованием переводим их в функции прежнего аргумента. Таким способом получим для функций, входящих в выражение (118,6), следующие формулы преобразования:

$$F_1 \to \frac{F_1}{2\sin\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)}+F_2\cdot 2^{-4k-1/3}\frac{\Gamma\left(-2k-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(-2k+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(-2k)\,\Gamma\left(-2k+\frac{2}{3}\right)},$$
$$F_2 \to -\frac{F_2}{2\sin\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)}+F_1\cdot 2^{4k+1/3}\frac{\Gamma\left(2k+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k+1)\,\Gamma\left(2k+\frac{1}{3}\right)}, \tag{118,11}$$

причем под F_1 и F_2 подразумеваются выражения

$$F_1=|\theta|^{2k}F\left(-k,\ -k+\frac{1}{2},\ -2k+\frac{5}{6};\ 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right),$$
$$F_2=|\theta|^{2k}\left|1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right|^{2k+1/6}F\left(k+\frac{1}{6},\ k+\frac{2}{3},\ 2k+\frac{7}{6};\ 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right), \tag{118,12}$$

в которых θ и $1-4\eta^3/9\theta^2$ в коэффициентах при гипергеометрических функциях берутся по их абсолютным значениям.

Аналогичным образом можно получить формулы преобразования при переходе из точки A' в точку B' (рис. 119) путем обхода начала координат в обратном направлении. Вычисления при этом более громоздки, так как приходится проходить через три особые точки гипергеометрических функций — точку с $\theta=0$ и два раза точки с $\eta=0$ (напомним, что особыми точками гипергеометрической функции аргумента z являются точки $z=1$ и $z=\infty$). Окончательные формулы гласят:

$$F_1 \to -\frac{\sin\pi\left(4k-\frac{1}{6}\right)}{\sin\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)}F_1+$$
$$+F_2\cdot 2^{-4k+2/3}\cos\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)\frac{\Gamma\left(-2k-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(-2k+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(-2k)\,\Gamma\left(-2k+\frac{2}{3}\right)},$$

$$F_2 \to \frac{\sin\pi\left(4k-\frac{1}{6}\right)}{\sin\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)} F_2 + \\ + F_1 \cdot 2^{4k+4/3} \cos\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right) \frac{\Gamma\left(2k+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k+1)\,\Gamma\left(2k+\frac{1}{3}\right)}. \qquad (118,13)$$

Наряду с рассмотренным семейством однородных решений можно построить, конечно, и другие семейства частных интегралов уравнения Эйлера — Трикоми. Укажем здесь семейство решений, возникающих в связи с разложением Фурье по углу θ. Если искать Φ в виде

$$\Phi_\nu = g_\nu(\eta)\, e^{\pm i\nu\theta}, \qquad (118,14)$$

где ν — произвольная постоянная, то для функции g_ν получим уравнение

$$g_\nu'' + \nu^2 \eta g_\nu = 0.$$

Это — уравнение функций Эйри; его общий интеграл есть

$$g_\nu(\eta) = \sqrt{\eta}\, Z_{1/3}\left(\frac{2\nu}{3}\eta^{3/2}\right), \qquad (118,15)$$

где $Z_{1/3}$ — произвольная линейная комбинация функций Бесселя порядка $1/3$.

Наконец, полезно иметь в виду, что общий интеграл уравнения Эйлера — Трикоми может быть написан в виде

$$\Phi = \int_C f(\zeta)\, dz, \qquad \zeta = z^3 - 3\eta z + 3\theta, \qquad (118,16)$$

где $f(\zeta)$ — произвольная функция, а интегрирование производится в плоскости комплексного переменного z по любому контуру C, на концах которого производная $f'(\zeta)$ принимает одинаковые значения. Действительно, непосредственная подстановка выражения (118,16) в уравнение дает

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} - \eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 9\int_C (z^2-\eta) f''(\zeta)\, dz = 3\int f''(\zeta)\, d\zeta = 3f'(\zeta)\,| = 0,$$

т. е. уравнение удовлетворяется.

§ 119. Решения уравнения Эйлера — Трикоми вблизи неособых точек звуковой поверхности

Выясним теперь, какие решения Φ_k соответствуют тем случаям, когда в окрестности границы перехода течение газа не обладает никакими физическими особенностями (нет слабых разрывов или ударных волн). Для этого, однако, удобнее исходить