$$F_2 \to \frac{\sin \pi \left(4k - \frac{1}{6}\right)}{\sin \pi \left(2k + \frac{1}{6}\right)} F_2 + \\ + F_1 \cdot 2^{4k+4/3} \cos \pi \left(2k + \frac{1}{6}\right) \frac{\Gamma\left(2k + \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(2k + \frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k+1)\, \Gamma\left(2k + \frac{1}{3}\right)}. \tag{118,13}$$

Наряду с рассмотренным семейством однородных решений можно построить, конечно, и другие семейства частных интегралов уравнения Эйлера — Трикоми. Укажем здесь семейство решений, возникающих в связи с разложением Фурье по углу θ. Если искать Φ в виде

$$\Phi_\nu = g_\nu(\eta)\, e^{\pm i\nu\theta}, \tag{118,14}$$

где ν — произвольная постоянная, то для функции g_ν получим уравнение

$$g_\nu'' + \nu^2 \eta g_\nu = 0.$$

Это — уравнение функций Эйри; его общий интеграл есть

$$g_\nu(\eta) = \sqrt{\eta}\, Z_{1/3}\left(\frac{2\nu}{3} \eta^{3/2}\right), \tag{118,15}$$

где $Z_{1/3}$ — произвольная линейная комбинация функций Бесселя порядка $^1/_3$.

Наконец, полезно иметь в виду, что общий интеграл уравнения Эйлера — Трикоми может быть написан в виде

$$\Phi = \int_C f(\zeta)\, dz, \qquad \zeta = z^3 - 3\eta z + 3\theta, \tag{118,16}$$

где $f(\zeta)$ — произвольная функция, а интегрирование производится в плоскости комплексного переменного z по любому контуру C, на концах которого производная $f'(\zeta)$ принимает одинаковые значения. Действительно, непосредственная подстановка выражения (118,16) в уравнение дает

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 9 \int_C (z^2 - \eta) f''(\zeta)\, dz = 3 \int f''(\zeta)\, d\zeta = 3f'(\zeta)\,| = 0,$$

т. е. уравнение удовлетворяется.

§ 119. Решения уравнения Эйлера — Трикоми вблизи неособых точек звуковой поверхности

Выясним теперь, какие решения Φ_k соответствуют тем случаям, когда в окрестности границы перехода течение газа не обладает никакими физическими особенностями (нет слабых разрывов или ударных волн). Для этого, однако, удобнее исходить не непосредственно из уравнения Эйлера — Трикоми, а из уравнения для потенциала скорости в физической плоскости. Такое уравнение было выведено в § 114; для плоского движения уравнение (114,10) после введения новой координаты согласно $x \to x(2\alpha_*)^{1/3}$ принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \qquad (119,1)$$

Напомним, что потенциал φ определен здесь таким образом, что его производные по координатам дают скорость согласно равенствам

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \eta, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \theta. \qquad (119,2)$$

Заметим также, что уравнение Эйлера — Трикоми можно получить и непосредственно из уравнения (119,1), переходя к независимым переменным θ, η с помощью преобразования Лежандра, причем будет $\Phi = -\varphi + x\eta + y\theta$, или

$$\varphi = -\Phi + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \qquad (119,3)$$

Выбрав начало координат x, y в точке звуковой линии, окрестность которой мы исследуем, разложим φ по степеням x и y. В общем случае первый член разложения, удовлетворяющего уравнению (119,1), есть

$$\varphi = \frac{1}{a} xy. \qquad (119,4)$$

При этом $\theta = x/a$, $\eta = y/a$, так что

$$\Phi = a\theta\eta. \qquad (119,5)$$

По степени однородности этой функции ясно, что ему соответствует одна из функций $\Phi_{5/6}$; это есть второй член выражения (118,7), в котором гипергеометрическая функция с $k = {}^5/_6$ сводится просто к 1:

$$\eta\theta F\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{4}{3}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) = \eta\theta.$$

Если мы хотим найти уравнение звуковой линии в физической плоскости, то написанный первый член разложения недостаточен. Следующий член разложения Φ имеет степень однородности 1, т. е. соответствует одной из функций Φ_1; это есть первый член выражения (118,7), сводящийся при $k = 1$ к полиному:

$$\theta^2 F\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) = \theta^2 + \frac{\eta^3}{3}.$$

Таким образом, первые два члена разложения Φ:

$$\Phi = a\eta\theta + b\left(\theta^2 + \frac{\eta^3}{3}\right). \tag{119,6}$$

Отсюда

$$x = a\theta + b\eta^2, \qquad y = a\eta + 2b\theta. \tag{119,7}$$

Звуковая линия ($\eta = 0$) есть прямая $y = 2bx/a$.

Для нахождения же уравнения характеристик в физической плоскости достаточен первый член разложения. Подставляя $\theta = x/a$, $\eta = y/a$ в уравнение годографических характеристик $\theta = \pm 2\eta^{3/2}/3$, получим:

$$x = \pm \frac{2}{3\sqrt{a}}\, y^{3/2},$$

т. е. снова две ветви полукубической параболы с точкой возврата на звуковой линии (жирная кривая на рис. 120).

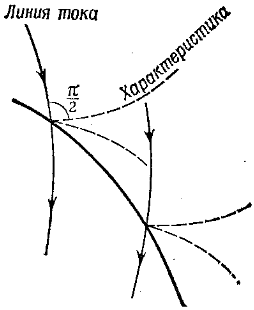

Рис. 120

Это свойство характеристик заранее очевидно из следующих простых соображений. В точках линии перехода угол Маха равен $\pi/2$. Это значит, что касательные к характеристикам обоих семейств совпадают, что и означает наличие здесь точки возврата (рис. 120). Линии же тока пересекают звуковую линию перпендикулярно к характеристикам, не имея здесь особенностей.

Решение (119,6) неприменимо в том исключительном случае, когда линия тока перпендикулярна к звуковой линии в рассматриваемой точке[1]). Вблизи такой точки течение, очевидно, симметрично относительно оси x. Этот случай требует особого рассмотрения (*Ф. И. Франкль* и *С. В. Фалькович*, 1945).

Симметрия течения означает, что при изменении знака y скорость v_y меняет знак, а v_x остается неизменной. Другими словами, потенциал φ должен быть четной функцией y (а потенциал Φ — четной функцией θ). Первые члены разложения φ будут поэтому в этом случае иметь следующий вид:

$$\varphi = \frac{ax^2}{2} + \frac{a^2xy^2}{2} + \frac{a^3y^4}{24} \tag{119,8}$$

(относительный порядок малости x и y не предопределен, так что все три написанных члена могут быть одинакового порядка). Отсюда находим следующие формулы преобразования из

[1]) В решении (119,6) этому соответствовало бы равенство нулю постоянной a; но при $a = 0$ это решение теряет смысл, так как на линии $\eta = 0$ обращается в нуль якобиан Δ.

физической плоскости в плоскость годографа:

$$\eta = ax + \frac{a^2y^2}{2}, \qquad \theta = a^2xy + \frac{a^3y^3}{6}. \tag{119,9}$$

Уже не решая этих уравнений относительно x и y в явном виде, легко видеть, что степень однородности функции $y(\theta, \eta)$ равна $^1/_6$. Поэтому соответствующая функция Φ имеет $k = {^1/_6} + {^1/_2} = {^2/_3}$, т. е. заключена в общем интеграле $\Phi_{2/3}$.

Иключив из уравнений (119,9) x, получим для определения функции $y(\theta, \eta)$ кубическое уравнение

$$(ay)^3 - 3\eta ay + 3\theta = 0. \tag{119,10}$$

При $\theta^2 - 4\eta^3/9 > 0$, т. е. во всей области слева от годографических характеристик, проходящих через точку $\eta = \theta = 0$ (в том

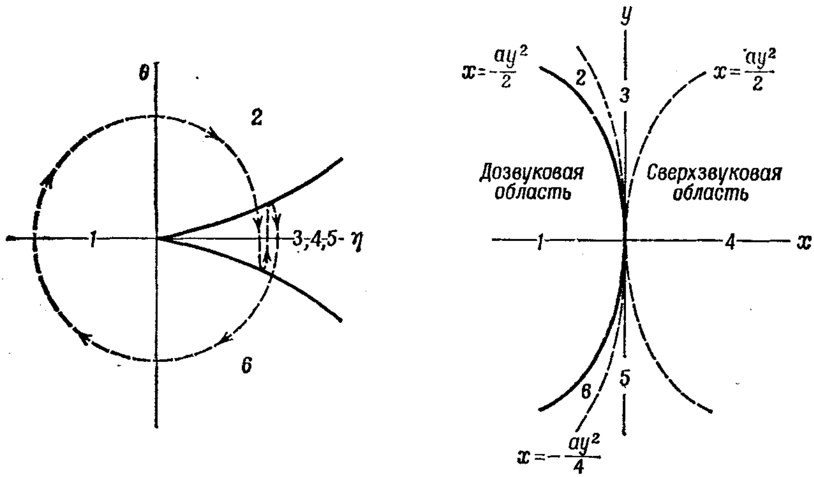

Рис. 121

числе во всей дозвуковой области, $\eta < 0$; рис. 121), это уравнение имеет всего один вещественный корень, который и должен быть взят в качестве функции $y(\theta, \eta)$. В области же справа от характеристик вещественны все три корня; из них должен быть взят тот, который является продолжением вещественного в левой области корня.

Характеристики в физической плоскости (проходящие через начало координат) получаются подстановкой выражений (119,9) в уравнение $4\eta^3 = 9\theta^2$. Это дает две параболы:

$$\begin{aligned} &\text{характеристики } 23 \text{ и } 56\text{: } x = -ay^2/4, \\ &\text{характеристики } 34 \text{ и } 45\text{: } x = ay^2/2 \end{aligned} \tag{119,11}$$

(цифры указывают, какие две области в физической плоскости разделяет данная характеристика). Звуковая же линия ($\eta = 0$

в плоскости годографа) в физической плоскости есть парабола $x = -ay^2/2$ (жирная кривая на рис. 121). Отметим следующую особенность точки пересечения звуковой линии с осью симметрии: из этой точки исходят четыре ветви характеристик, между тем как из всякой другой точки звуковой линии — всего две.

На рис. 121 одинаковыми цифрами отмечены соответствующие друг другу области плоскости годографа и физической плоскости. Это соответствие — не взаимно однозначное[1]); при полном обходе вокруг начала координат в физической плоскости область между двумя характеристиками в плоскости годографа проходится трижды, как это указано пунктирной линией на рис. 121 дважды отражающейся от характеристик.

Поскольку функция $y(\theta, \eta)$ сама удовлетворяет уравнению Эйлера — Трикоми, то она должна содержаться в общем интеграле $\Phi_{1/6}$. Вблизи характеристики *23* в физической плоскости это есть

$$y = \frac{1}{a}\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{1/3} F\left(-\frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2};\ 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \qquad (119{,}12)$$

(первый член выражения (118,6), не имеющий особенности на характеристике). Производя ее аналитическое продолжение в окрестность характеристики *56* (по пути, проходящему через дозвуковую область *1*, т. е. с помощью формул (118,13)), мы получим там такую же функцию. Вблизи же характеристик *34* и *45* $y(\theta, \eta)$ представится линейными комбинациями этой функции и функции

$$\theta^{1/3}\sqrt{\frac{4\eta^3}{9\theta^2} - 1}\, F\left(\frac{1}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{3}{2};\ 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \qquad (119{,}13)$$

(второй член выражения (118,6)); эти комбинации получаются путем аналитического продолжения с помощью формул (118,11) (причем надо иметь в виду, что при каждом отражении от годографической характеристики квадратный корень в функции (119,13) меняет знак).

С математической точки зрения полученные результаты показывают, что функции $\Phi_{1/6}$ являются линейными комбинациями корней кубического уравнения

$$f^3 - 3\eta f + 3\theta = 0, \qquad (119{,}14)$$

т. е. сводятся к алгебраическим функциям[2]). Вместе с $\Phi_{1/6}$ сводятся к алгебраическим функциям также и все Φ_k с

$$k = \frac{1}{6} \pm \frac{n}{2}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (119{,}15)$$

[1]) В соответствии с тем, что на характеристике $x = ay^2/2$ в физической плоскости имеем $\Delta = \infty$ (см. примечание на стр. 609).

[2]) Пользоваться явным выражением этих функций, получаемым из (119,14) с помощью формулы Кардана, фактически неудобно.

получающиеся согласно формулам (118,9) и (118,10) из $\Phi_{1/6}$ путем последовательных дифференцирований (*Ф. И. Франкль*, 1947).

К алгебраическим функциям сводятся также те функции Φ_k с

$$k = \pm\frac{n}{2}, \qquad k = \frac{1}{3} \pm \frac{n}{2}, \tag{119,16}$$

в которых гипергеометрическая функция сводится к полиному[1]) (так, при $k = n/2$ это есть первый член, а при $k = -n/2$ — второй член выражения (118,6)).

К этим трем семействам алгебраических функций Φ_k относятся, в частности, все те функции, которые могут соответствовать (в качестве потенциала Φ) течениям, не имеющим никаких особенностей в физической плоскости. Именно, для таких течений все члены разложения Φ вблизи несимметричной точки линии перехода (первые два члена которого даются формулой (119,6)) могут иметь лишь $k = 5/6 + n/2$ или $k = 1 + n/2$. Разложение же Φ вблизи симметричной точки (начинающееся членом с $k = 2/3$) может, кроме того, содержать еще функции с $k = 2/3 + n/2$.

§ 120. Обтекание со звуковой скоростью

Упрощенное уравнение Чаплыгина в форме уравнения Эйлера — Трикоми должно, в принципе, применяться к исследованию основных качественных особенностей стационарного плоского обтекания тел, связанных с наличием в нем околозвуковых областей. Сюда относятся, в первую очередь, вопросы, связанные с возникновением ударных волн. В околозвуковой зоне интенсивность ударной волны мала; подчеркнем, что именно это обстоятельство делает законным применение уравнения Эйлера — Трикоми в этих условиях. Напомним (см. §§ 86, 114), что в слабой ударной волне изменение энтропии и ротора скорости — величины более высоких порядков малости; поэтому в первом приближении движение можно считать изэнтропическим и потенциальным и позади разрыва.

В этом параграфе мы рассмотрим теоретически важный вопрос — о характере стационарного плоского обтекания, когда скорость набегающего потока равна в точности скорости звука. Мы увидим, что при таком обтекании непременно имеется простирающаяся от тела до бесконечности ударная волна. Отсюда следует важное заключение о том, что ударная волна должна впервые возникнуть при числе M_∞, во всяком случае меньшем единицы.

---

[1]) Здесь надо иметь в виду, что $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ сводится к полиному, если для α (или β) имеет место $\alpha = -n$ или $\gamma - \alpha = -n$.