

получающиеся согласно формулам (118,9) и (118,10) из $\Phi_{1/6}$ путем последовательных дифференцирований (Ф. И. Франкль, 1947).

К алгебраическим функциям сводятся также те функции Φ_k с

$$k = \pm \frac{n}{2}, \quad k = \frac{1}{3} \pm \frac{n}{2}, \quad (119,16)$$

в которых гипергеометрическая функция сводится к полиному¹⁾ (так, при $k = n/2$ это есть первый член, а при $k = -n/2$ — второй член выражения (118,6)).

К этим трем семействам алгебраических функций Φ_k относятся, в частности, все те функции, которые могут соответствовать (в качестве потенциала Φ) течениям, не имеющим никаких особенностей в физической плоскости. Именно, для таких течений все члены разложения Φ вблизи несимметричной точки линии перехода (первые два члена которого даются формулой (119,6)) могут иметь лишь $k = 5/6 + n/2$ или $k = 1 + n/2$. Разложение же Φ вблизи симметричной точки (начинающееся членом с $k = 2/3$) может, кроме того, содержать еще функции с $k = 2/3 + n/2$.

§ 120. Обтекание со звуковой скоростью

Упрощенное уравнение Чаплыгина в форме уравнения Эйлера — Трикоми должно, в принципе, применяться к исследованию основных качественных особенностей стационарного плоского обтекания тел, связанных с наличием в нем околосвуковых областей. Сюда относятся, в первую очередь, вопросы, связанные с возникновением ударных волн. В околосвуковой зоне интенсивность ударной волны мала; подчеркнем, что именно это обстоятельство делает законным применение уравнения Эйлера — Трикоми в этих условиях. Напомним (см. §§ 86, 114), что в слабой ударной волне изменение энтропии и ротора скорости — величины более высоких порядков малости; поэтому в первом приближении движение можно считать изэнтропическим и потенциальным и позади разрыва.

В этом параграфе мы рассмотрим теоретически важный вопрос — о характере стационарного плоского обтекания, когда скорость набегающего потока равна в точности скорости звука.

Мы увидим, что при таком обтекании непременно имеется простирающаяся от тела до бесконечности ударная волна. Отсюда следует важное заключение о том, что ударная волна должна впервые возникнуть при числе M_∞ , во всяком случае меньшем единицы.

¹⁾ Здесь надо иметь в виду, что $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ сводится к полиному, если для α (или β) имеет место $\alpha = -n$ или $\gamma - \alpha = -n$.

Итак, рассмотрим плоское обтекание тела с бесконечно длинным размахом («крыла») произвольного, не обязательно симметричного сечения. При этом мы будем интересоваться картиной течения на достаточно больших (по сравнению с размерами) расстояниях от тела. Для удобства изложения мы сначала опишем качественно получающиеся результаты, а затем перейдем к количественному расчету. На рис. 122 AB и $A'B'$ — звуковые линии, так что слева от них (вверх по течению) лежит целиком дозвуковая область; стрелкой изображено направление натекающего потока (которое мы ниже выбираем в качестве оси x с началом где-либо в районе тела). На некотором расстоянии от линии перехода возникают «исходящие» от тела ударные волны (EF и $E'F'$ на рис. 122). Оказывается, что все исходящие от тела характеристики (в области между линией перехода и ударной волной) можно разделить на две группы. Характеристики первой группы достигают звуковой линии, оканчиваясь на ней (или, иначе говоря, отражаясь от нее в виде характеристики, приходящей к телу; на рис. 122 изображена одна из таких характеристик). Характеристики же второй группы оканчиваются на ударной волне. Обе эти группы разделены *предельными характеристиками* — единственными, уходящими на бесконечность и никогда не достигающими ни звуковой линии, ни ударной волны (CD и $C'D'$ на рис. 122). Поскольку возмущения (связанные, например, с изменением контура обтекаемого тела), распространяющиеся от тела по характеристикам первой группы, достигают границы дозвуковой области, то ясно, что часть сверхзвукового потока, лежащая между линией перехода и предельной характеристикой, влияет на дозвуковую область; весь же поток в области справа от предельных характеристик никакого влияния на поток слева не оказывает: течение слева никак не изменится при возмущении потока справа (в том числе при изменении профиля тела справа от точек C , C'). Течение позади ударной волны, как мы знаем, никак не влияет на течение перед ней. Таким образом, весь поток можно разделить на три части (слева от $DCC'D'$ между $DCC'D'$ и $FEE'F'$, справа от $FEE'F'$), причем течение во второй никак не влияет на течение в первой, а течение в третьей — на течение во второй.

Перейдем теперь к количественному расчету описанной картины (являющемуся в то же время ее проверкой).

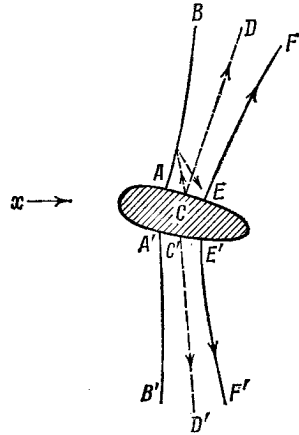


Рис. 122

Начало координат в плоскости годографа ($\theta = \eta = 0$) соответствует бесконечно удаленной области в физической плоскости, а выходящие из начала координат годографические характеристики соответствуют предельным характеристикам CD и CD' . На рис. 123 изображена окрестность начала координат, причем буквы соответствуют обозначениям на рис. 122. Ударная волна изображается в плоскости годографа не одной линией, а двумя (соответствующими движению газа по обеим сторонам разрыва), причем области между ними (заштрихованной на рис. 123) не соответствуют никакой области в физической плоскости.

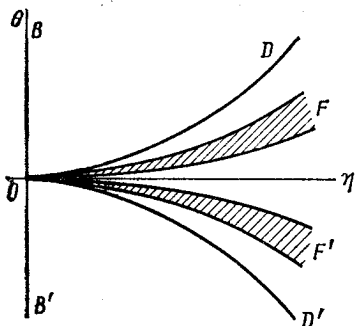


Рис. 123

Прежде всего необходимо выяснить, какой из общих интегралов Φ_k соответствует данному случаю обтекания. Если $\Phi(\theta, \eta)$ имеет порядок однородности k , то функции $x = \partial\Phi/\partial\eta$ и $y = \partial\Phi/\partial\theta$ будут однородными — соответственно порядков $k - 1/3$ и $k - 1/2$. При стремлении θ и η к нулю мы должны, вообще говоря, попасть на бесконечность в физической плоскости, т. е. x и y должны стремиться к бесконечности. Очевидно, что для этого должно быть $k < 1/3$. С другой стороны, предельные характеристики в физической плоскости не должны лежать целиком на бесконечности, т. е. не должно быть $y = \pm\infty$ по всей линии $9\theta^2 = 4\eta^3$. Для этого (при $2k + 1/6 < 5/6$) второй член в квадратных скобках в выражении (118,6) должен вообще отсутствовать. Таким образом, функция $\Phi(\theta, \eta)$ должна изображаться первым членом выражения (118,6):

$$\Phi = A\theta^{2k} F\left(-k, -k + \frac{1}{2}, -2k + \frac{5}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right). \quad (120,1)$$

Функция $y(\theta, \eta)$ (тоже удовлетворяющая уравнению Эйлера — Трикоми) будет иметь такой же вид с $k - 1/2$ вместо k .

Но если выражение (120,1) имеет место, например, вблизи верхней характеристики ($\theta = +^2/3\eta^{3/2}$), то при произвольном $k < 1/3$ оно отнюдь не будет иметь место также и вблизи второй характеристики ($\theta = -^2/3\eta^{3/2}$). Поэтому мы должны потребовать также, чтобы вид (120,1) функции $\Phi(\theta, \eta)$ оставался таким же при обходе вокруг начала координат в плоскости годографа от одной характеристики к другой, причем обход должен происходить через полу плоскость $\eta < 0$ (путь $A'B'$ на рис. 119). Такой обход соответствует в физической плоскости переходу от удаленных точек одной из предельных характеристик к удален-

ным точкам другой предельной характеристики, причем путь перехода проходит через дозвуковую область и потому нигде не пересекает ударную волну, нарушающую непрерывность течения. Преобразование гипергеометрической функции в (120,1) при таком переходе дается первой из формул (118,13), и мы должны потребовать обращения в нуль коэффициента перед F_2 в этой формуле. Это условие выполняется при следующих значениях $k < 1/3$:

$$k = \frac{1}{6} - \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из всех этих значений должно быть окончательно выбрано лишь одно:

$$k = -\frac{1}{3}. \quad (120,2)$$

Можно показать, что все значения k с $n > 1$ приводят к неоднозначному отображению плоскости годографа на физическую плоскость (при однократном обходе первой вторая обходится несколько раз), т. е. к неоднозначности физического течения, что, разумеется, нелепо. Значение же $k = 1/6$ дает решение, в котором не по всем направлениям в физической плоскости стремление θ и η к нулю означает уход на бесконечность; ясно, что такое решение тоже физически непригодно.

При $k = -1/3$ коэффициент при F_1 в правой стороне формулы (118,13) равен $+1$, т. е. при обходе от одной характеристики к другой функция Φ вообще не меняется. Это значит, что Φ есть четная функция θ , а координата $y = \partial\Phi/\partial\theta$ — соответственно нечетная функция. Физически это означает, что в рассматриваемом нами первом приближении картина течения на больших расстояниях от тела оказывается симметричной относительно плоскости $y = 0$ независимо от формы тела, в частности от наличия или отсутствия подъемной силы.

Таким образом, мы выяснили характер особенности, которую имеет $\Phi(\eta, \theta)$ в точке $\eta = \theta = 0$. Уже непосредственно отсюда можно сделать заключение о форме звуковой линии, предельных характеристик и ударной волны на больших расстояниях от тела. Каждая из этих линий должна соответствовать определенному значению отношения θ^2/η^3 , и поскольку Φ имеет вид $\Phi = \theta^{-2/3} f(\eta^3/\theta^2)$, то с помощью формул (118,4) мы найдем, что $x \propto \theta^{-4/3}$, $y \propto \theta^{-5/3}$. Поэтому форма перечисленных линий определяется уравнениями вида

$$x = \text{const} \cdot y^{4/5} \quad (120,3)$$

со своим значением const для каждой из них. Вдоль этих

линий θ и η падают по законам:

$$\theta \propto y^{-3/5}, \quad \eta \propto y^{-2/5} \quad (120,4)$$

(Ф. И. Франкль, 1947; К. Guderley, 1948)¹).

Мы будем для определенности писать формулы со знаками, соответствующими верхней полуплоскости ($y > 0$).

Покажем, как могут быть вычислены коэффициенты в этих формулах. Значение $k = -1/3$ есть одно из тех, при которых Φ_k сводится к алгебраическим функциям (см. предыдущий параграф). Тот частный интеграл, который в данном случае определяет Φ , может быть написан в виде $\Phi = \frac{a_1}{2} \frac{\partial f}{\partial \theta}$, где a_1 — произвольная положительная постоянная, а f есть тот корень кубического уравнения

$$f^3 - 3\eta f + 3\theta = 0, \quad (120,5)$$

который при $9\theta^2 - 4\eta^3 > 0$ совпадает с единственным вещественным корнем. Отсюда

$$\Phi = \frac{a_1}{2} \frac{\partial f}{\partial \theta} = - \frac{a_1}{2(f^2 - \eta)}, \quad (120,6)$$

а также для координат

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{a_1(f^2 + \eta)}{2(f^2 - \eta)^2}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \frac{a_1 f}{(f^2 - \eta)^2}. \quad (120,7)$$

Эти формулы можно представить в удобном параметрическом виде, введя в качестве параметра величину $s = f^2/(f^2 - \eta)$; тогда

$$\frac{x}{y^{4/5}} = a_1^{1/5} \frac{2s - 1}{2s^{2/5}}; \quad \eta y^{2/5} = a_1^{2/5} s^{1/5} (s - 1), \quad \theta y^{3/5} = \frac{a_1^{3/5}}{3} s^{4/5} (3 - 2s), \quad (120,8)$$

чем определяется в параметрическом виде зависимость η и θ от координат. Параметр s пробегает положительные значения, начиная от нуля ($s = 0$ соответствует $x = -\infty$, т. е. натекающему с бесконечности потоку). В частности, значение $s = 1/2$ соответствует $x = 0$, т. е. дает распределение скоростей при больших y

¹) Упомянем, что аналогичные результаты оказываются возможным получить и для осесимметричного обтекания (с $M_\infty = 1$).

В цилиндрических координатах x, r форма звуковой поверхности, предельной характеристики и ударной волны, и законы изменения скорости на них даются (вдали от тела) формулами

$$x = \text{const} \cdot r^{4/7}, \quad v_x \propto r^{-6/7}, \quad v_r \propto r^{-9/7}.$$

См. Гудерлей К. Г. Теория околосзвуковых течений. — М.: ИЛ, 1960 [Guderley K. G. Theorie schallnaher Strömungen. — Springer Verlag, 1957]; Фалькович С. В., Чернов И. А. — Прикл. Матем. Мех., 1964, т. 28, с. 342.

в перпендикулярной к оси x плоскости, проходящей в районе обтекаемого тела. Значение $s=1$ соответствует звуковой линии ($\eta=0$), а $s=4/3$, как легко убедиться, — предельной характеристике. Значение же постоянной a_1 зависит от конкретной формы обтекаемого тела и могло бы быть определено лишь путем точного решения задачи во всем пространстве.

Формулы (120,8) относятся лишь ко всей области перед ударной волной. Неизбежность появления последней видна уже из следующих соображений. Простое вычисление по формуле (118,5) дает для якобиана Δ выражение

$$\Delta = a_1^2 \frac{4f^2 - \eta}{(f^2 - \eta)^3}.$$

Легко видеть, что на характеристиках и во всей области слева от них (что соответствует области вверх по течению от предельных характеристик в физической плоскости) $\Delta > 0$ и нигде в нуль не обращается. В области же справа от характеристик Δ проходит через нуль, откуда и видна неизбежность возникновения здесь ударной волны.

Граничные условия, которым должно удовлетворять решение уравнения Эйлера — Трикоми на ударной волне, заключаются в следующем. Пусть θ_1, η_1 и θ_2, η_2 — значения θ и η по обеим сторонам разрыва. Прежде всего они должны соответствовать одной и той же кривой в физической плоскости, т. е.

$$x(\theta_1, \eta_1) = x(\theta_2, \eta_2), \quad y(\theta_1, \eta_1) = y(\theta_2, \eta_2). \quad (120,9)$$

Далее, условие непрерывности касательной к разрыву компоненты скорости (т. е. условие непрерывности производной от потенциала φ вдоль линии разрыва) эквивалентно условию непрерывности самого потенциала:

$$\varphi(\theta_1, \eta_1) = \varphi(\theta_2, \eta_2) \quad (120,10)$$

(потенциал φ определяется по функции Φ формулой (119,3)). Наконец, последнее условие можно получить из предельной формы уравнения ударной поляры (92,6), устанавливающего определенную связь между компонентами скорости по обеим сторонам разрыва. Заменяя в (92,6) угол χ на $\theta_2 - \theta_1$ и введя η_1, η_2 вместо v_1, v_2 , получим следующее соотношение:

$$2(\theta_2 - \theta_1)^2 = (\eta_2 - \eta_1)^2(\eta_2 + \eta_1). \quad (120,11)$$

В данном случае решение уравнения Эйлера — Трикоми позади ударной волны (область между OF и OF' в плоскости годографа; рис. 123) имеет тот же вид (120,5—6), но, конечно, с другим постоянным коэффициентом (обозначим его как $-a_2$) вместо a_1 . Четыре уравнения (120,9—11) определяют отношение a_2/a_1 и связывают между собой величины: $\eta_1, \theta_1, \eta_2, \theta_2$. В резуль-

тате довольно сложного их совместного решения получаются следующие результаты. Ударной волне соответствует значение

$$s = (5\sqrt{3} + 8)/6 = 2,58$$

параметра s в формулах (120,8), дающих при этом форму волны и распределение скорости на передней стороне разрыва. В области позади (вниз по течению)

от ударной волны коэффициент $-a_2$ оказывается отрицательным, а параметр $f^2/(f^2 - \eta)$ пробегает отрицательные значения. Вводя здесь в качестве s положительную величину $s = \frac{f^2}{\eta - f^2}$, получим вместо (120,8) формулы

$$\frac{x}{y^{4/5}} = a_2^{1/5} \frac{2s + 1}{2s^{2/5}},$$

$$\eta y^{2/5} = a_2^{2/5} s^{1/5} (s + 1),$$

$$\theta y^{3/5} = -\frac{a_2^{3/5}}{3} s^{4/5} (2s + 3), \quad (120,12)$$

причем

$$a_2/a_1 = (9\sqrt{3} + 1)/(9\sqrt{3} - 1) = 1,14,$$

а s пробегает значения от

$$s = (5\sqrt{3} - 8)/6 = 0,11$$

(на ударной волне) до нуля (на бесконечности вниз по течению).

На рис. 124 изображены графики зависимости $\eta y^{2/5}$ и $\theta y^{3/5}$ от

$xy^{-4/5}$, вычисленные по формулам (120,8) и (120,12) (постоянная a_1 условно положена равной единице).

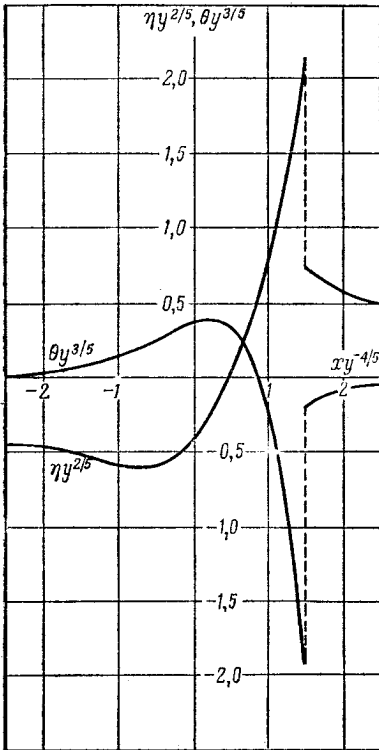


Рис. 124

§ 121. Отражение слабого разрыва от звуковой линии

Рассмотрим, снова с помощью уравнения Эйлера — Трикоми, отражение слабого разрыва от звуковой линии.

Будем считать, что падающий на звуковую линию слабый разрыв («приходящий» по отношению к точке их пересечения) — обычного типа, возникающего, скажем, при обтекании острых