

тате довольно сложного их совместного решения получаются следующие результаты. Ударной волне соответствует значение

$$s = (5\sqrt{3} + 8)/6 = 2,58$$

параметра s в формулах (120,8), дающих при этом форму волны и распределение скорости на передней стороне разрыва. В области позади (вниз по течению)

от ударной волны коэффициент $-a_2$ оказывается отрицательным, а параметр $f^2/(f^2 - \eta)$ пробегает отрицательные значения. Вводя здесь в качестве s положительную величину $s = \frac{f^2}{\eta - f^2}$, получим вместо (120,8) формулы

$$\frac{x}{y^{4/5}} = a_2^{1/5} \frac{2s + 1}{2s^{2/5}},$$

$$\eta y^{2/5} = a_2^{2/5} s^{1/5} (s + 1),$$

$$\theta y^{3/5} = -\frac{a_2^{3/5}}{3} s^{4/5} (2s + 3), \quad (120,12)$$

причем

$$a_2/a_1 = (9\sqrt{3} + 1)/(9\sqrt{3} - 1) = 1,14,$$

а s пробегает значения от

$$s = (5\sqrt{3} - 8)/6 = 0,11$$

(на ударной волне) до нуля (на бесконечности вниз по течению).

На рис. 124 изображены графики зависимости $\eta y^{2/5}$ и $\theta y^{3/5}$ от

$xy^{-4/5}$, вычисленные по формулам (120,8) и (120,12) (постоянная a_1 условно положена равной единице).

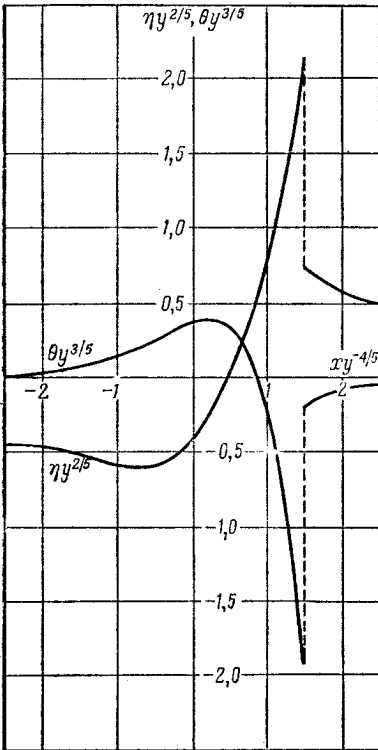


Рис. 124

§ 121. Отражение слабого разрыва от звуковой линии

Рассмотрим, снова с помощью уравнения Эйлера — Трикоми, отражение слабого разрыва от звуковой линии.

Будем считать, что падающий на звуковую линию слабый разрыв («приходящий» по отношению к точке их пересечения) — обычного типа, возникающего, скажем, при обтекании острых

углов, т. е. разрыв первых производных скорости по координатам. Он отражается от звуковой линии в виде другого разрыва, характер которого, однако, заранее неизвестен и должен быть определен путем исследования течения в окрестности точки пересечения. Последнюю выбираем ниже в качестве начала координат x, y , а ось x — вдоль направления скорости газа в этой точке; тогда ей соответствует начало координат и в плоскости годографа.

Слабые разрывы расположены, как мы знаем, вдоль характеристик. Пусть приходящему разрыву соответствует в пло-

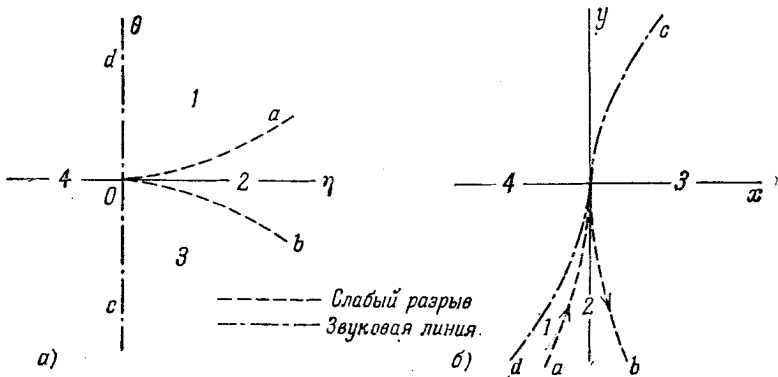


Рис. 125

скости годографа характеристика Oa (рис. 125, *a*). Непрерывность координат x, y на разрыве означает, что должны быть непрерывными первые производные Φ_η, Φ_θ . Напротив, вторые производные от Φ выражаются через первые производные от скорости по координатам и потому должны испытывать разрыв. Обозначая скачки величин квадратными скобками, имеем, таким образом:

на Oa :

$$[\Phi_\eta] = [\Phi_\theta] = 0; \quad [\Phi_{\theta\theta}], [\Phi_{\theta\eta}], [\Phi_{\eta\eta}] \neq 0. \quad (121,1)$$

Сами же функции Φ в областях 1 и 2 по обе стороны от характеристики Oa не должны иметь на ней никаких особенностей. Такое решение можно построить с помощью второго члена в (118,6) с $k=11/12$, пропорционального квадрату разности $(1 - 4\eta^3/9\theta^2)$ (второе же независимое решение $\Phi_{11/12}$ имеет на характеристике особенность — см. ниже); первые производные этой функции на характеристике обращаются в нуль, а вторые — конечны. Кроме того, в Φ могут войти такие частные решения уравнения Эйлера — Трикоми, которые не приводят ни к каким особенностям течения в физической плоскости. Наиболее

низким по степеням θ и η таким решением является $\theta\eta$ (§ 119). Таким образом, вблизи характеристики Oa ищем Φ в виде

$$\begin{aligned}\Phi_{a1} &= -A\eta\theta - B\theta^{11/6}\xi^2 F\left(\frac{13}{12}, \frac{19}{12}, 3; \xi\right), \\ \Phi_{a2} &= -A\eta\theta - C\theta^{11/6}\xi^2 F\left(\frac{13}{12}, \frac{19}{12}, 3; \xi\right),\end{aligned}\quad (121,2)$$

где индексы $a1$ и $a2$ указывают окрестности по обе стороны характеристики (в областях 1 и 2); A, B, C — постоянные, и снова введено обозначение

$$\xi = 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}$$

(на характеристике $\xi = 0$).

Мы увидим ниже, что в зависимости от знака произведения AB могут иметь место два случая: слабый разрыв отражается в виде слабого же разрыва другого (логарифмического) характера или в виде ударной волны малой интенсивности.

Отражение в виде слабого разрыва

Рассмотрим сначала первый из этих случаев (Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, 1954). Отраженному от звуковой линии слабому разрыву соответствует в плоскости годографа вторая характеристика (Ob на рис. 125, а). Вид функции Φ вблизи этой характеристики устанавливается путем аналитического продолжения функций (121,2) согласно формулам (118,11—13). Однако при $k = 11/12$ функция F_1 теряет смысл и поэтому непосредственно воспользоваться этими формулами нельзя. Вместо этого надо положить в них сначала $k = 11/12 + \varepsilon$, после чего устремить ε к нулю. В соответствии с общей теорией гипергеометрического уравнения при этом появляются логарифмические члены.

В результате вычисления (с помощью (118,13)) для функции Φ вблизи характеристики Ob в области 3 получается следующее выражение (с точностью до членов второго порядка по ξ включительно):

$$\Phi_{b3} = -A\theta\eta + \frac{B}{\pi}(-\theta)^{11/6} \{ \xi^2 \ln|\xi| + c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 \}, \quad (121,3)$$

где c_0, c_1, c_2 — числовые постоянные¹⁾. Аналогичное преобразование (с помощью (118,11)) функции Φ_{a2} от окрестности характеристики Oa к окрестности характеристики Ob дает функцию Φ_{b2} , отличающуюся от (121,3) лишь заменой B на $C/2$. Координаты x, y точек характеристики в физической плоскости вычис-

¹⁾ Значение этих постоянных:

$$c_0 = -2^9 \cdot 3^4 / 385 = -108, \quad c_1 = 288/7 = 41,1, \quad c_2 = 4,86.$$

ляются как производные (118,4), взятые при $\xi = 0$. Так, исходя из (121,3) найдем

$$\begin{aligned} x &= -A\theta - \frac{12^{1/3} Bc_1}{\pi} (-\theta)^{7/6}, \\ y &= -A \left(-\frac{3\theta}{2}\right)^{2/3} - \frac{B}{\pi} \left(\frac{11}{6} c_0 + 2c_1\right) (-\theta)^{5/6}, \end{aligned} \quad (121,4)$$

а дифференцирование функции Φ_{b2} даст такие же выражения с $C/2$ вместо B . Условие непрерывности координат x, y на характеристике Ob приводит, следовательно, к соотношению

$$C = 2B. \quad (121,5)$$

Далее, для осуществления рассматриваемой картины отражения должны отсутствовать предельные линии в плоскости годографа (и тем самым — нефизические области в этой плоскости), т. е. якобиан Δ нигде не должен проходить через нуль. Вблизи характеристики Oa якобиан вычисляется с помощью функций (121,2) и оказывается положительным (главный член в нем: $\Delta \approx A^2$). Вблизи же характеристики Ob вычисление с помощью (121,3) дает

$$\Delta \approx A^2 - 16 \left(\frac{3}{2}\right)^{1/6} AB\eta^{1/4} \ln |\xi|. \quad (121,6)$$

При приближении к характеристике логарифм стремится к $-\infty$, и главным является второй член. Поэтому из условия $\Delta > 0$ имеем $AB > 0$, т. е. A и B должны иметь одинаковый знак.

Наконец, для определения формы звуковой линии нам понадобятся выражения для Φ вблизи оси $\eta = 0$. Выражение, пригодное в окрестности верхней части этой оси, получается просто преобразованием гипергеометрической функции в Φ (121,2) в гипергеометрические функции аргумента $1 - \xi = 4\eta^3/9\theta^2$, обращаемого в нуль при $\eta = 0$ ¹⁾. Сохранив лишь члены наиболее низких степеней по η , получим

$$\Phi_d = -A\eta\theta - \frac{2\Gamma(1/3)}{\Gamma(23/12)\Gamma(17/12)} B\theta^{11/6} = -A\eta\theta - 6,25B\theta^{11/6}. \quad (121,7)$$

Аналитическое же продолжение в область нижней части оси дает

$$\Phi_c = -A\eta\theta - 6,25 \cdot \sqrt{3} B\theta^{11/6} \quad (121,8)$$

(вычисления аналогичны выводу формулы преобразования (118,13)).

Теперь можно определить форму всех интересующих нас линий. На характеристиках имеем, отбрасывая члены более высо-

¹⁾ Это преобразование приведено, например, в § е Математического приложения в III — формула (е, 7).

кого порядка: $x = -A\theta$, $y = -A\eta$. Мы условились считать, что приходящему слабому разрыву отвечает верхняя характеристика ($\theta > 0$). Поскольку скорость газа направлена в положительном направлении оси x , то этот разрыв, для того чтобы быть приходящим, должен лежать в полуплоскости $x < 0$. Отсюда следует, что постоянная A , а с нею и B должны быть положительными. Уравнение линии слабого разрыва в физической плоскости будет

$$-y = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} A^{1/3} (-x)^{2/3} = 1,31A^{1/3} (-x)^{2/3}. \quad (121,9)$$

Отраженный же разрыв, соответствующий нижней характеристике, дается уравнением¹⁾

$$-y = 1,31A^{1/3} x^{2/3} \quad (121,10)$$

(см. рис. 125, б; обозначение линий и областей на этом рисунке соответствует обозначениям на рис. 125, а).

Уравнение звуковой линии получается из функций (121,7—8). Дифференцируя по η и θ и положив затем $\eta = 0$, получим из (121,7) уравнение той части линии, на которой $\theta > 0$:

$$x = -A\theta, \quad y = -\frac{11}{6} \cdot 6,25B\theta^{5/6},$$

откуда

$$y = -11,4BA^{-5/6} (-x)^{5/6}. \quad (121,11)$$

Это — нижняя часть звуковой линии на рис. 125, б. Аналогичным образом из (121,8) находим уравнение верхней части этой линии:

$$y = 11,4 \sqrt{3} BA^{-5/6} x^{5/6}. \quad (121,12)$$

Таким образом, оба слабых разрыва и обе ветви звуковой линии имеют в точке пересечения O общую касательную (ось y), причем две ветви звуковой линии лежат по разные стороны оси y .

На приходящем разрыве испытывают скачок производные от скорости по координатам. В качестве характерной величины рассмотрим скачок производной $(\partial\eta/\partial x)_y$. Имея в виду, что

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial(\eta, y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\eta, y)}{\partial(\eta, \theta)} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(\eta, \theta)} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$$

и воспользовавшись формулами (121,2), (121,5), получим для искомого скачка:

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y \Big|_1^2 = 8 \left(\frac{3}{2}\right)^{1/6} \frac{B}{A^2} \eta^{-1/4} = 8,56 BA^{-7/4} (-y)^{-1/4}. \quad (121,13)$$

При приближении к точке пересечения он растет как $(-y)^{-1/4}$.

¹⁾ С учетом первых поправочных членов (вторые члены в формулах (121,4)) уравнение отраженного разрыва:

$$-y = 1,31A^{1/3} x^{2/3} - 10,5BA^{-5/6} x^{5/6}. \quad (121,10a)$$

На отраженном же слабом разрыве производные скорости вообще не испытывают скачка, но распределение скоростей имеет своеобразную логарифмическую особенность. Вычислив из функции (121,3) (сохранив в ней лишь первый член в скобках) координаты x и y в функции от η , θ , можно представить зависимость η от x при заданном y вблизи отраженного разрыва в следующем параметрическом виде:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{|y|}{A} + \frac{x - x_0}{2\sqrt{A|y|}} - \frac{1}{6A} |y| \zeta, \\ x - x_0 &= \frac{1}{3\sqrt{A}} |y|^{3/2} \zeta - 5,7 \frac{B|y|^{7/4}}{\pi A^{7/4}} \zeta \ln |\zeta|, \end{aligned} \quad (121,14)$$

где ζ играет роль параметра, а $x_0 = x_0(y)$ — уравнение линии разрыва в физической плоскости.

Отражение в виде ударной волны

Перейдем к рассмотрению другого случая — отражения слабого разрыва от звуковой линии в виде ударной волны (Л. П. Горьков, Л. П. Пятаевский, 1962)¹⁾.

Этот случай возникает, если произведение $AB < 0$. Из (121,6) видно, что в этом случае имеется две предельные линии, экспоненциально близкие к характеристике Ob : якобиан Δ обращается в нуль при

$$|\xi| \approx \frac{2}{|\theta|} \left| \theta + \frac{2}{3} \eta^{3/2} \right| e^{-\theta}, \quad \theta = \frac{A\pi(2/3)^{1/6}}{16|B|\eta^{1/4}}. \quad (121,15)$$

Заранее очевидно, что экспоненциально близкими к характеристике будут и границы нефизической области на плоскости годографа (Ob_2 и Ob_3 на рис. 126, а), и тем самым будет экспоненциально мала интенсивность ударной волны.

Пренебрегая экспоненциально малыми значениями ξ на линиях Ob_2 и Ob_3 , мы получим для координат x , y на них те же выражения, которые мы имели на двух сторонах характеристики Ob в предыдущем случае. Поэтому условие непрерывности координат на ударной волне во всяком случае приводит к прежнему соотношению (121,5). Соответственно, остается прежним и выражение (121,13) для скачка производной от скорости на падающем разрыве. Снова приняв, что этому разрыву отвечает верхняя характеристика Oa на плоскости годографа, будем по-прежнему иметь $A > 0$, так что теперь $B < 0$. Из (121,13) видно, следовательно, что физическим критерием происхождения двух слу-

¹⁾ Принципиальная возможность такого отражения отмечалась ранее Гудерлеем (K. G. Guderley, 1948).

чаев отражения слабого разрыва является знак скачка производной скорости на падающем разрыве.

Остаются прежними (при пренебрежении экспоненциально малыми поправками) уравнения (121,9—10) линий падающего (слабого) и отраженного (ударной волны) разрывов. Но ввиду другого знака постоянной B меняется расположение этих линий на физической плоскости — как это показано на рис. 126, б.

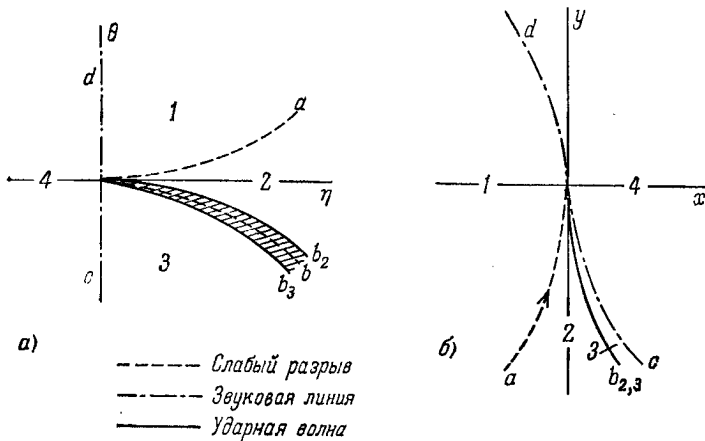


Рис. 126

Для определения интенсивности ударной волны (т. е. скачков величин $\delta\theta$ и $\delta\eta$ на ней) надо обратиться к полной системе граничных условий, которым должно удовлетворять на ударной волне решение уравнения Эйлера — Трикоми. Они были сформулированы уже в § 120: условия (120,9—11). Из них последнее, уравнение ударной поляры, принимает вид $(\delta\theta)^2 = \eta(\delta\eta)^2$, где $\delta\theta = \theta_{b_2} - \theta_{b_3}$, $\delta\eta = \eta_{b_2} - \eta_{b_3}$ — экспоненциально малые скачки величин на ударной волне (индексы b_2 и b_3 относятся к линиям Ob_2 и Ob_3 на плоскости годографа, т. е. соответственно к передней и задней сторонам ударной волны на физической плоскости). Отсюда

$$\delta\theta = \sqrt{\eta} \delta\eta; \quad (121,16)$$

выбор знака при извлечении корня определяется тем, что одновременно с уменьшением скорости газа при его прохождении через ударную волну должно происходить приближение линий тока к поверхности разрыва.

В соответствии с (121,15) ищем уравнения линий Ob_2 и Ob_3 в плоскости годографа в виде

$$\theta \mp \frac{2}{3} \eta^{3/2} = a_{b_2} |\theta| e^{-\theta}, \quad \theta \mp \frac{2}{3} \eta^{3/2} = -a_{b_3} |\theta| e^{-\theta},$$

где a_{b2} и a_{b3} — положительные числа. Согласно (121,16) $\delta(\theta + \frac{2}{3}\eta^{3/2}) = \delta\theta + \sqrt{\eta} \delta\eta = 2\delta\theta$. Искомые скачки $\delta\theta$ и $\delta\eta$ даются поэтому следующими выражениями:

$$\delta\theta = a \frac{x}{A} e^{-\Theta}, \quad \delta\eta = a \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{x}{A}\right)^{2/3} e^{-\Theta}, \quad (121,17)$$

$$\Theta = \frac{A\pi(2/3)^{1/3}}{16|B|} \left(\frac{A}{x}\right)^{1/6} = 0,17 \frac{A^{7/6}}{|B|x^{1/6}},$$

где $a = (a_{b2} + a_{b3})/2$; переменные η , θ выражены через координаты на физической плоскости согласно $x \approx -A\theta$, $y \approx -A\eta$. Определение коэффициента a требует учета также и всех остальных граничных условий, причем в них должны учитываться члены как линейные, так и квадратичные по экспоненциально малой величине $\exp(-\Theta)$. Не приводя этих довольно громоздких вычислений, укажем лишь их результат: $a_{b2} = a_{b3} = a = 5,2$.