

Трикоми, удовлетворяющего всем этим требованиям, по-видимому, еще не доказано<sup>1)</sup>).

Другая возможность для конфигурации ударной волны и звуковой линии в местной сверхзвуковой зоне состоит в окончании в точке пересечения одной лишь звуковой линии (рис. 128, б); в этой точке интенсивность ударной волны отнюдь не обращается в нуль, так что течение вблизи нее является околосзвуковым лишь по одну сторону от ударной волны. Сама ударная волна может при этом одним концом «упираться» в твердую поверхность, а другим (или обоими) начинаться непосредственно в сверхзвуковом потоке (ср. конец § 115).

### § 123. Сверхзвуковое обтекание заостренного тела

Форма, которой должно обладать тело для того, чтобы при сверхзвуковом движении быть хорошо обтекаемым, т. е. испытывать по возможности малую силу сопротивления, существенно отличается от соответствующей формы для дозвукового движения. Напомним, что в дозвуковом случае хорошо обтекаемыми являются продолговатые тела, закругленные спереди и заостренные сзади. При сверхзвуковом же обтекании такого тела перед ним появилась бы сильная ударная волна, что привело бы к сильному возрастанию сопротивления. Поэтому в сверхзвуковом случае хорошо обтекаемое удлиненное тело должно иметь заострен-

<sup>1)</sup> П. Жермен нашел несколько типов решений уравнения Эйлера — Трикоми, которые могли бы изображать пересечение ударной волны со звуковой линией, но их исследование не было по существу завершено. Некоторые из

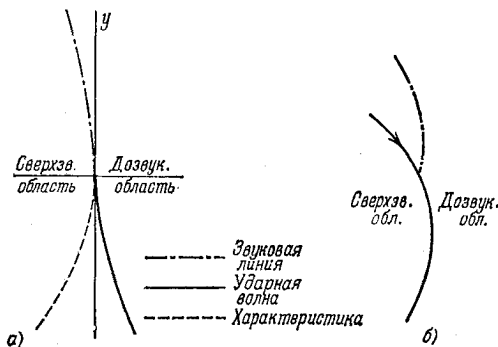


Рис. 128

этих типов не удовлетворяют поставленному выше условию (1). На рис. 128, а изображен случай, который мог бы отвечать точке окончания ударной волны, замыкающей местную сверхзвуковую область: в точке пересечения ударная волна и звуковая линия обе заканчиваются и имеют общую касательную, будучи расположены по разные стороны от нее (газ движется слева направо). Выполнение условия (2), однако, не проверено. Для показателя  $k$  решения указан лишь интервал, в котором он мог бы находиться ( $3/4 < k < 11/12$ ),

но не проверено, может ли при этом быть удовлетворено условие непрерывности координат на ударной волне в физической плоскости. См. *Germain P. Ecoulements transsoniques homogènes*. В кн.: *Progress in Aeronautical Sciences*. — Pergamon Press, 1964, v. 5.

ным не только задний, но и передний конец, причем угол заострения должен быть малым; если ось тела наклонена к направлению движения, то угол наклона (угол атаки) тоже должен быть малым.

При стационарном сверхзвуковом обтекании тела такой формы скорость газа даже вблизи тела будет везде лишь незначительно отличаться по величине и направлению от скорости натекающего потока, а образующиеся ударные волны будут обладать малой интенсивностью (интенсивность головной волны убывает вместе с уменьшением раствора обтекаемого угла). Вдали от тела движения газа будет представлять собой расходящиеся звуковые волны. Основную часть сопротивления газа можно представлять себе как обусловленную переходом кинетической энергии движущегося тела в энергию излучаемых им звуковых волн. Это сопротивление, специфическое для сверхзвукового движения, называют *волновым*<sup>1)</sup>; оно может быть вычислено в общем виде при любой форме сечения тела (*Th. Karman, N. B. Moore, 1932*).

Описанный характер течения делает возможным применение линеаризованного уравнения для потенциала (114,4):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (123,1)$$

где для краткости введена положительная постоянная

$$\beta^2 = \frac{v_1^2}{c_1^2} - 1 \quad (123,2)$$

(ось  $x$  направлена по направлению движения, индекс 1 отличает величины, относящиеся к натекающему потоку);  $1/\beta$  есть не что иное, как тангенс угла Маха.

Уравнение (123,1) формально совпадает с двухмерным волновым уравнением, причем  $x/v_1$  играет роль времени, а  $v_1/\beta$  — роль скорости распространения волн. Это обстоятельство не случайно и имеет глубокий физический смысл, так как движение газа вдали от тела представляет собой, как уже указано, именно излучаемые телом расходящиеся звуковые волны. Если представить себе газ на бесконечности покоящимся, а тело движущимся, то площадь поперечного сечения тела в заданном месте пространства будет меняться со временем, причем расстояние, до которого к моменту  $t$  распространятся возмущения (т. е. расстояние до конуса Маха), будет расти как  $v_1 t/\beta$ ; таким образом, мы будем иметь дело с «двухмерным» излучением звука (распространяющегося со скоростью  $v_1/\beta$ ) пульсирующим контуром.

<sup>1)</sup> Полная сила сопротивления получается прибавлением к волновому сопротивлению сил, связанных с трением и с отрывом у заднего конца тела.

Руководствуясь этой «звуковой аналогией», можно сразу же написать искомое выражение для потенциала скорости газа, воспользовавшись выражением (74,15) для потенциала излучаемых пульсирующим источником цилиндрических звуковых волн (на расстояниях, больших по сравнению с размерами источника), заменив в последнем  $ct$  на  $x/\beta$ . Пусть  $S(x)$  — площадь сечения тела плоскостями, перпендикулярными к направлению обтекания (оси  $x$ ), а длина тела в этом направлении пусть будет  $l$ ; начало координат выберем в переднем конце тела. Тогда будем иметь:

$$\varphi(x, r) = -\frac{v_1}{2\pi} \int_0^{x-\beta r} \frac{S'(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 r^2}}; \quad (123,3)$$

в качестве нижнего предела написан нуль, так как при  $x < 0$  (как и при  $x > l$ ) надо положить тождественно  $S(x) \equiv 0$ .

Таким образом, мы полностью определили движение газа на расстояниях  $r$  от оси, больших по сравнению с толщиной тела <sup>1)</sup>. Исходящие от тела возмущения в сверхзвуковом потоке распространяются, разумеется, только в область позади конуса  $x - \beta r = 0$  с вершиной в переднем конце тела; перед этим конусом имеем просто  $\varphi = 0$  (однородный поток). Между конусами  $x - \beta r = 0$  и  $x - \beta r = l$  потенциал определяется формулой (123,3); позади же конуса  $x - \beta r = l$  (с вершиной в заднем конце тела) в этой формуле верхний предел заменяется постоянной величиной  $l$ . Оба указанных конуса представляют собой в рассматриваемом приближении слабые разрывы; в действительности это — ударные волны слабой интенсивности.

Действующая на тело сила сопротивления есть не что иное, как уносимая звуковыми волнами в единицу времени  $x$ -компонента импульса. Выберем в качестве контрольной поверхности цилиндрическую поверхность достаточно большого радиуса  $r$  с осью вдоль оси  $x$ . Плотность потока  $x$ -компоненты импульса через эту поверхность есть

$$P_{xr} = \rho v_r (v_x + v_1) \approx \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left( v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

<sup>1)</sup> Для осесимметричного обтекания тела вращения формула (123,3) справедлива для всех вообще  $r$  вплоть до самой поверхности тела. Из нее можно, в частности, получить снова формулу (113,6) для обтекания тонкого конуса.

С другой стороны, рассмотрев это полученное в линейном приближении решение вдали от обтекаемого тела, можно ввести в него эффект нелинейного искажения профиля подобно тому, как это было сделано в § 102 для цилиндрической звуковой волны. Этим путем можно определить интенсивность ударной волны на больших расстояниях от тонкого заостренного тела вращения (в том числе ее зависимость от  $M_1$ ), т. е. коэффициент в законе затухания ( $\infty r^{-3/4}$ ), о котором шла речь в предыдущем параграфе. См. *Уизем Дж.* Линеиные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977, § 9.3 [*Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves. — Wiley, 1974].

При интегрировании по всей поверхности первый член исчезает, так как интеграл от  $\rho v_r$  есть равный нулю полный поток массы газа через контрольную поверхность. Поэтому остается

$$F_x = -2\pi r \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{xr} dx = -2\pi r \rho_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx. \quad (123,4)$$

На больших расстояниях (в волновой зоне) производные от потенциала вычисляются так, как это было сделано в § 74 (см. формулу (74,17)), и получается:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{v_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta}{2r}} \int_0^{x-\beta r} \frac{S''(\xi) d\xi}{\sqrt{x-\xi-\beta r}}.$$

Это выражение подставляем в (123,4), причем квадрат интеграла переписываем в виде двойного интеграла; обозначая для краткости  $x - \beta r = X$ , получим:

$$F_x = \frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^X \int_0^X \frac{S''(\xi_1) S''(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dX}{\sqrt{(X-\xi_1)(X-\xi_2)}}.$$

Произведем интегрирование по  $dX$ ; после изменения порядка интегрирования оно должно производиться в пределах от большего из  $\xi_1$  и  $\xi_2$  до  $+\infty$ . В качестве верхнего предела берем сначала некоторое большое, но конечное  $L$ , которое затем можно устремить к бесконечности. Таким образом, получим:

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi} \int_0^l \int_0^{\xi_2} S''(\xi_1) S''(\xi_2) [\ln(\xi_2 - \xi_1) - \ln 4L] d\xi_1 d\xi_2.$$

Интеграл от члена с постоянным множителем  $\ln 4L$  тождественно исчезает, так как на заостренных концах тела обращается в нуль не только площадь  $S(x)$ , но и ее производная  $S'(x)$ . Таким образом, окончательно получим:

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi} \int_0^l \int_0^{\xi_2} S''(\xi_1) S''(\xi_2) \ln(\xi_2 - \xi_1) d\xi_1 d\xi_2,$$

или

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi} \int_0^l \int_0^l S''(\xi_1) S''(\xi_2) \ln |\xi_2 - \xi_1| d\xi_1 d\xi_2. \quad (123,5)$$

Это и есть искомая формула для волнового сопротивления тонкого заостренного тела<sup>1)</sup>. Порядок величины стоящего здесь интеграла есть  $(S/l^2)^2 l^2$ , где  $S$  — некоторая средняя площадь сечения тела. Поэтому

$$F_x \sim \rho_1 v_1^2 S^2 / l^2.$$

Коэффициент сопротивления удлиненного тела условимся определять как

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 l^2}, \quad (123,6)$$

относя его к квадрату длины тела. В данном случае

$$C_x \sim S^2 / l^4; \quad (123,7)$$

он пропорционален квадрату площади поперечного сечения тела.

Обратим внимание на формальную аналогию между формулой (123,5) и формулой (47,4) для индуктивного сопротивления тонкого крыла: вместо функции  $\Gamma(z)$  в (47,4) здесь стоит функция  $v_1 S'(x)$ . Ввиду этой аналогии для вычисления интеграла (123,5) можно пользоваться тем же методом, который был изложен в конце § 47.

Следует также заметить, что определяемое формулой (123,5) волновое сопротивление не изменится, если изменить направление обтекания на обратное, — стоящий в этой формуле интеграл не зависит от того, в каком направлении проходит длина тела. Это свойство силы сопротивления характерно именно для линеаризованной теории<sup>2)</sup>.

Наконец, несколько слов об области применимости полученной формулы. К этому вопросу можно подойти следующим образом. Амплитуда колебаний газовых частиц в излучаемых телом звуковых волнах — порядка величины толщины тела, которую мы обозначим посредством  $\delta$ . Скорость же колебаний — соответственно порядка величины отношения  $\delta v_1 / l$  амплитуды  $\delta$  к периоду волны  $l / v_1$ . Но линейное приближение для распространения звуковых волн (т. е. линеаризованное уравнение для потенциала) во всяком случае требует малости скорости движения газа в волне по сравнению со скоростью звука, т. е. должно быть  $v_1 / \beta \gg v_1 \delta / l$ , или, что фактически то же:

$$M_1 \ll l / \delta. \quad (123,8)$$

<sup>1)</sup> Что касается подъемной силы (для неосесимметрического тела или при наличии угла атаки), то в рассматриваемом здесь приближении таковая вообще отсутствует.

<sup>2)</sup> Оно имеет место и в изложенной в § 125 теории волнового сопротивления тонкого крыла.

Таким образом, изложенная теория становится неприменимой при значениях  $M_1$ , сравнимых с отношением длины тела к его толщине.

Она неприменима, разумеется, и в обратном предельном случае слишком близких к единице значений  $M_1$ , когда тоже недопустима линеаризация уравнений.

### Задача

Определить форму удлиненного тела вращения, испытывающего минимальную силу сопротивления при заданных его объеме  $V$  и длине  $l$ .

Решение. Ввиду указанной в тексте аналогии вводим переменную  $\theta$  согласно  $x = \frac{l}{2}(1 - \cos \theta)$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ : начало отсчета  $x$  — в переднем конце тела) и пишем функцию  $f(x) = S'(x)$  в виде

$$f = -l \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin n\theta$$

(условие  $S = 0$  при  $x = 0$ ,  $l$  допускает в этой сумме, как легко убедиться, лишь значения  $n \geq 2$ ). Для коэффициента сопротивления имеем при этом

$$C_x = \frac{\pi}{4} \sum_{n=2}^{\infty} n A_n^2.$$

Площадь  $S(x)$  и полный объем тела  $V$  вычисляются по функции  $f(x)$  как

$$S = \int_0^l f(x) dx, \quad V = \int_0^l S(x) dx.$$

Простое вычисление дает

$$V = \frac{\pi l^3}{16} A_2,$$

т. е. объем определяется одним лишь коэффициентом  $A_2$ . Поэтому минимальное  $F_x$  достигается при равных нулю  $A_n$  с  $n \geq 3$ . В результате получаем:

$$C_{x \min} = \frac{128}{\pi} \left( \frac{V}{l^3} \right)^2 = \frac{9\pi}{2} \left( \frac{S_{\max}}{l^2} \right)^2.$$

При этом для площади сечения тела имеем  $S = 1/3 l^2 A_2 \sin^3 \theta$ , откуда радиус тела как функция координаты  $x$  выражается в виде

$$R(x) = \frac{8}{\pi} \left( \frac{V}{3l^3} \right)^{1/2} [x(l-x)]^{3/4} \left( \frac{2}{l} \right)^{1/2}.$$

Тело симметрично относительно плоскости  $x = l/2$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Хотя  $R(x)$  и обращается в нуль на концах тела, но производная  $R'(x)$  обращается в бесконечность, т. е. тело оказывается незаостренным; поэтому, строго говоря, лежащее в основе метода приближение вблизи самых концов неприменимо.