§ 124. Дозвуковое обтекание тонкого крыла

Рассмотрим обтекание хорошо обтекаемого тонкого «крыла» дозвуковым потоком сжимаемого газа. Как и в несжимаемом газе, хорошо обтекаемое дозвуковым потоком крыло должно быть тонким и иметь заостренную заднюю и закругленную переднюю кромки; угол атаки должен быть малым. Выберем направление обтекания в качестве оси x, а ось z — в направлении размаха крыла.

Скорость газа во всем пространстве[1]) будет лишь незначительно отличаться от скорости $\mathbf{v}_1$ натекающего потока, так что можно применять линеаризованное уравнение (114,4) для потенциала:

$$\left(1-\mathrm{M}_1^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \qquad (124,1)$$

На поверхности крыла (которую будем называть поверхностью C) скорость должна быть направлена по касательной к ней; вводя единичный вектор $\mathbf{n}$ нормали к поверхности крыла, напишем это условие в виде

$$\left(v_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)n_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}n_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}n_z=0.$$

Поскольку крыло обладает уплощенной формой и угол атаки мал, то нормаль $\mathbf{n}$ направлена почти параллельно оси y, так что $|n_y|$ близко к единице, а n_x, n_z малы. В написанном условии мы можем поэтому опустить малые члены второго порядка $n_y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $n_z\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$, а вместо n_y написать ± 1 ($+1$ на верхней поверхности крыла и -1 на нижней). Таким образом, граничное условие к уравнению (124,1) приобретает вид

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \qquad (124,2)$$

В силу предположенной тонкости крыла значение $\partial\varphi/\partial y$ на его поверхности можно вычислять просто как предел при $y\to 0$.

Задачу о решении уравнения (124,1) с условием (124,2) можно легко привести к задаче об обтекании несжимаемой жидкостью. Для этого введем вместо координат x, y, z переменные

$$x'=x,\qquad y'=y\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2},\qquad z'=z\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}. \qquad (124,3)$$

В этих переменных уравнение (124,1) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}=0, \qquad (124,4)$$

[1]) За исключением лишь небольшой области вблизи передней кромки крыла — вблизи линии остановки газа.

т. е. переходит в уравнение Лапласа. Что касается формы обтекаемой поверхности, то введем вместо нее другую, C', оставив неизменным профиль сечений крыла поверхностями, параллельными плоскости x, y, уменьшив только в отношении $\left(1-\mathrm{M}_1^2\right)^{1/2}$ все размеры вдоль размаха крыла (оси z).

Граничное условие (124,2) приобретает тогда вид

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}=0,$$

и для приведения его к обычному виду введем вместо φ новый потенциал φ' согласно

$$\varphi'=\varphi\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}. \qquad (124,5)$$

Для φ' будем иметь то же уравнение Лапласа и граничное условие

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial\varphi'}{\partial y'}=0, \qquad (124,6)$$

которое должно удовлетворяться при $y'=0$.

Но уравнение (124,4) с граничным условием (124,6) есть уравнение, которому должен удовлетворять потенциал скорости несжимаемой жидкости, обтекающей тело с поверхностью C'. Таким образом, задача об определении распределения скоростей при обтекании крыла с поверхностью C сжимаемой жидкостью сводится к нахождению распределения скоростей при обтекании несжимаемой жидкостью крыла с формой поверхности C'.

Рассмотрим, далее, действующую на крыло подъемную силу F_y. Раньше всего замечаем, что произведенный в § 38 вывод формулы Жуковского (38,4) полностью применим и к сжимаемой жидкости, поскольку вместо переменной плотности ρ жидкости все равно надо в том же приближении писать постоянную величину ρ_1. Таким образом,

$$F_y=-\rho_1 v_1\int\Gamma\,dz, \qquad (124,7)$$

где интегрирование производится по всей длине l_z размаха крыла. Из соотношения (124,5)и одинаковости поперечных профилей крыльев C и C' следует, что циркуляция Γ скорости при обтекании крыла C сжимаемой жидкостью связана с циркуляцией Γ' скорости при обтекании крыла C' несжимаемой жидкостью соотношением

$$\Gamma'=\Gamma\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}. \qquad (124,8)$$

Подставляя это в (124,7) и переходя от интегрирования по dz к интегрированию по dz', получим:

$$F_y=\frac{-\rho_1 v_1\int\Gamma'\,dz'}{1-\mathrm{M}_1^2}.$$

Величина, стоящая в числителе, представляет собой подъемную силу, действующую на крыло C' в несжимаемой жидкости. Обозначая ее посредством F'_y, имеем:

$$F_y = \frac{F'_y}{1 - M_1^2}. \qquad (124,9)$$

Вводя коэффициенты подъемной силы

$$C_y = \frac{F_y}{{}^1/_2\rho_1 v_1^2 l_x l_z}, \qquad C'_y = \frac{F'_y}{{}^1/_2\rho_1 v_1^2 l_x l'_z}$$

(где l_x, l_z и l_x, $l'_z = l_z\sqrt{1 - M_1^2}$ — длины крыльев C и C' вдоль осей x и z), перепишем это равенство в виде

$$C_y = \frac{C'_y}{\sqrt{1 - M_1^2}}. \qquad (124,10)$$

Для крыльев достаточно большого размаха (с постоянным вдоль размаха профилем сечения) коэффициент подъемной силы в несжимаемой жидкости пропорционален углу атаки и не зависит от длины и ширины крыла:

$$C'_y = \text{const} \cdot \alpha, \qquad (124,11)$$

где const зависит только от формы профиля сечения (см. § 46). В этом случае можно поэтому написать вместо (124,10)

$$C_y = \frac{C_y^{(0)}}{\sqrt{1 - M_1^2}}, \qquad (124,12)$$

где C_y и $C_y^{(0)}$ — коэффициенты подъемной силы одного и того же крыла соответственно в потоках сжимаемого и несжимаемого газа. Таким образом, мы получим такое правило: подъемная сила, действующая на длинное крыло в потоке сжимаемого газа, в $(1 - M_1^2)^{-1/2}$ раз больше подъемной силы, действующей на такое же крыло (при том же, в частности, угле атаки) в потоке несжимаемого газа (*L. Prandtl*, 1922; *H. Glauert*, 1928).

Аналогичные соотношения можно получить и для силы сопротивления. Наряду с формулой Жуковского для подъемной силы полностью переносится в теорию сжимаемой жидкости также и формула (47,4) для индуктивного сопротивления крыла. Произведя в ней те же преобразования (124,3) и (124,8), получим:

$$F_x = \frac{F'_x}{1 - M_1^2}, \qquad (124,13)$$

где F_x' — сопротивление крыла C' в несжимаемой жидкости. При увеличении длины размаха индуктивное сопротивление стремится к постоянному пределу (§ 47). Поэтому для достаточно длинных крыльев можно заменить F_x' на $F_x^{(0)}$ (сопротивление в несжимаемой жидкости того же крыла C, к которому относится F_x). Тогда для коэффициента сопротивления имеем:

$$C_x = \frac{C_x^{(0)}}{1 - M_1^2}. \tag{124,14}$$

Сравнив с (124,12), мы видим, что при переходе от несжимаемой жидкости к сжимаемой остается неизменным отношение C_y^2/C_x.

Все изложенные здесь результаты, разумеется, неприменимы при слишком близких к единице значениях M_1, когда вообще становится неприменимой линеаризованная теория.

§ 125. Сверхзвуковое обтекание крыла

Для того чтобы быть хорошо обтекаемым в сверхзвуковом потоке, крыло должно иметь заостренными как заднюю, так и переднюю кромки, подобно тому как должны быть заострены тонкие тела, рассматривавшиеся в § 123.

Здесь мы ограничимся изучением обтекания тонкого крыла с очень большим размахом, с постоянным вдоль размаха профилем сечения. Рассматривая длину размаха как бесконечную, мы будем иметь дело с плоским (в плоскости x, y) течением газа. Вместо уравнения (123,1) будем иметь теперь для потенциала уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \beta^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{125,1}$$

с граничным условием

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y\to\pm 0} = \mp v_1 n_x \tag{125,2}$$

(знаки $\mp$ в правой стороне равенства имеют место соответственно для верхней и нижней поверхностей крыла). Уравнение (125,1) есть уравнение типа одномерного волнового уравнения, и его общее решение имеет вид

$$\varphi = f_1(x - \beta y) + f_2(x + \beta y).$$

Тот факт, что влияющие на движение жидкости возмущения исходят от тела, означает, что в пространстве над крылом ($y > 0$) должно быть $f_2 \equiv 0$, так что $\varphi = f_1(x - \beta y)$, а в пространстве под крылом ($y < 0$): $\varphi = f_2(x + \beta y)$. Будем для определенности