

§ 126. Околозвуковой закон подобия

Развитая в §§ 123—125 теория сверх- и дозвуковых обтекаемых тонких тел неприменима в случае околозвукового движения, когда становится несправедливым линеаризованное уравнение для потенциала. В этом случае картина течения во всем пространстве определяется нелинейным уравнением (114,10):

$$2\alpha_* \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (126,1)$$

(или, при плоском движении, эквивалентным ему уравнением Эйлера — Трикоми). Решение этих уравнений для конкретных случаев, однако, весьма затруднительно. Поэтому существенный интерес представляют правила подобия, которые можно установить для таких течений, не прибегая к их конкретному решению.

Рассмотрим сначала плоское течение, и пусть

$$Y = \delta f(x/l) \quad (126,2)$$

есть уравнение, определяющее форму обтекаемого тонкого контура, причем l есть его длина (в направлении обтекания), а δ характеризует его толщину ($\delta \ll l$). Изменением двух параметров l и δ получим семейство подобных контуров.

Уравнение движения гласит:

$$2\alpha_* \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (126,3)$$

со следующими граничными условиями. На бесконечности скорость равна скорости v_1 невозмущенного потока, т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M_{1*} - 1 = \frac{M_1 - 1}{\alpha_*} \quad (126,4)$$

(см. определение потенциала φ согласно (114,9)). На профиле же скорость должна быть направлена по касательной к нему:

$$\frac{v_y}{v_x} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{dY}{dx} = \frac{\delta}{l} f' \left(\frac{x}{l} \right); \quad (126,5)$$

ввиду тонкости профиля можно требовать выполнения этого условия при $y = 0$.

Введем новые безразмерные переменные согласно

$$x = l\bar{x}, \quad y = \frac{l}{(\theta\alpha_*)^{1/3}} \bar{y}, \quad \varphi = \frac{l\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}} \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (126,6)$$

(мы ввели угол $\theta = \delta/l$, характеризующий «угол раствора» тела или угол атаки). Тогда мы получим уравнение

$$2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}^2}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} = K, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} = 0 \text{ на } \infty, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} = f'(\bar{x}) \text{ при } \bar{y} = 0,$$

где

$$K = \frac{M_1 - 1}{(\alpha_* \theta)^{2/3}}. \quad (126,7)$$

Эти условия содержат лишь один параметр: K . Таким образом, мы получили искомый закон подобия: плоские околосзвуковые течения с одинаковыми значениями числа K подобны, как это устанавливается формулами (126,6) (С. В. Фалькович, 1947).

Обратим внимание на то, что в выражение (126,7) входит также и единственный параметр α_* , характеризующий свойства самого газа. Поэтому полученное правило определяет также и подобие по изменению рода газа.

В условиях рассматриваемого приближения давление определяется формулой

$$p - p_1 \approx -\rho_1 v_1 (v_x - v_1).$$

Вычисление с помощью выражений (126,6) показывает, что коэффициент давления на профиль будет функцией вида

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2} = \frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}} P\left(K, \frac{x}{l}\right).$$

Коэффициенты силы сопротивления и подъемной силы определяются интегралами по контуру профиля:

$$C_x = \frac{1}{l} \int C_p \frac{dY}{dx} dx, \quad C_y = \frac{1}{l} \oint C_p dy$$

и, следовательно, являются функциями вида ¹⁾

$$C_x = \frac{\theta^{5/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_x(K), \quad C_y = \frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_y(K). \quad (126,8)$$

Совершенно аналогичным образом можно получить закон подобия для трехмерного обтекания тонкого тела, форма которого задается уравнениями вида

$$Y = \delta f_1\left(\frac{x}{l}\right), \quad Z = \delta f_2\left(\frac{x}{l}\right) \quad (126,9)$$

с двумя параметрами δ и l ($\delta \ll l$). Существенное отличие от плоского случая связано с тем, что потенциал имеет при $y \rightarrow 0$,

¹⁾ Область применимости этих формул определяется неравенством $|M_1 - 1| \ll 1$. Линеаризованной же теории соответствуют большие значения K , т.е. $|M_1 - 1| \gg \theta^{2/3}$. В области $1 \gg M_1 - 1 \gg \theta^{2/3}$ формулы (126,8) должны, следовательно, переходить в формулы (125,6—8) линеаризованной теории. Это значит, что при больших K функции f_x и f_y должны быть пропорциональны $K^{-1/2}$.

$z \rightarrow 0$ логарифмическую особенность (см., например, формулы обтекания тонкого конуса в § 113). Поэтому граничное условие на оси x должно определять не сами производные $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$, а остающиеся конечными произведения:

$$y \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Y \frac{dY}{dx}, \quad z \frac{\partial\varphi}{\partial z} = Z \frac{dZ}{dx}.$$

Легко убедиться в том, что преобразование подобия в этом случае является (снова вводим угол $\theta = \delta/l$)

$$x = \bar{l}x, \quad y = \frac{l}{\theta\alpha_*^{1/2}} \bar{y}, \quad z = \frac{l}{\theta\alpha_*^{1/2}} \bar{z}, \quad \varphi = l\theta^2 \bar{\varphi}, \quad (126,10)$$

причем параметр подобия

$$K = \frac{M_1 - 1}{\theta^2 \alpha_*} \quad (126,11)$$

(Т. Karman, 1947). Для коэффициента давления на поверхность тела получим выражение вида

$$C_p = \theta^2 P(K, x/l),$$

а для коэффициента силы сопротивления соответственно¹⁾

$$C_x = \theta^4 f(K). \quad (126,12)$$

Все полученные формулы относятся, конечно, как к малым положительным, так и к малым отрицательным значениям $M_1 - 1$. Если в точности $M_1 = 1$, то параметр подобия $K = 0$ и функции в формулах (126,8) и (126,12) сводятся к постоянным, так что эти формулы полностью определяют зависимость C_x и C_y от угла θ и свойств газа α_* .

§ 127. Гиперзвуковой закон подобия

Для обтекания тонких заостренных тел с большими сверхзвуковыми скоростями (большие M_1) линеаризованная теория неприменима, как это уже было упомянуто в конце § 114. Поэтому представляет особый интерес простое правило подобия, которое можно установить для таких течений (их называют *гиперзвуковыми*).

Возникающие при таком обтекании ударные волны наклонены к направлению движения под малым углом — порядка величины отношения $\theta = \delta/l$ толщины тела к его длине. Эти волны, вообще говоря, искривлены и в то же время обладают большой интенсивностью — хотя скачок скорости на них относительно мал, но скачок давления (а с ним и энтропии) велик. Поэтому течение газа в общем случае отнюдь не является потенциальным,

¹⁾ В области $1 \gg M_1 - 1 \gg \theta^2$ должна получаться формула (123,7) линеаризованной теории, согласно которой $C_x \sim \theta^4$; это значит, что при увеличении K функция $f(K)$ должна стремиться к постоянной.