$z \to 0$ логарифмическую особенность (см., например, формулы обтекания тонкого конуса в § 113). Поэтому граничное условие на оси x должно определять не сами производные $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$, а остающиеся конечными произведения:

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Y\frac{dY}{dx}, \qquad z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = Z\frac{dZ}{dx}.$$

Легко убедиться в том, что преобразованием подобия в этом случае является (снова вводим угол $\theta = \delta/l$)

$$x = l\bar{x}, \qquad y = \frac{l}{\theta\alpha_*^{1/2}}\bar{y}, \qquad z = \frac{l}{\theta\alpha_*^{1/2}}\bar{z}, \qquad \varphi = l\theta^2\bar{\varphi}, \qquad (126,10)$$

причем параметр подобия

$$K = \frac{M_1 - 1}{\theta^2\alpha_*} \qquad (126,11)$$

(*T. Karman*, 1947). Для коэффициента давления на поверхность тела получим выражение вида

$$C_p = \theta^2 P(K,\ x/l),$$

а для коэффициента силы сопротивления соответственно[1])

$$C_x = \theta^4 f(K). \qquad (126,12)$$

Все полученные формулы относятся, конечно, как к малым положительным, так и к малым отрицательным значениям $M_1 - 1$. Если в точности $M_1 = 1$, то параметр подобия $K = 0$ и функции в формулах (126,8) и (126,12) сводятся к постоянным, так что эти формулы полностью определяют зависимость C_x и C_y от угла θ и свойств газа α_*.

§ 127. Гиперзвуковой закон подобия

Для обтекания тонких заостренных тел с большими сверхзвуковыми скоростями (большие M_1) линеаризованная теория неприменима, как это уже было упомянуто в конце § 114. Поэтому представляет особый интерес простое правило подобия, которое можно установить для таких течений (их называют *гиперзвуковыми*).

Возникающие при таком обтекании ударные волны наклонены к направлению движения под малым углом — порядка величины отношения $\theta = \delta/l$ толщины тела к его длине. Эти волны, вообще говоря, искривлены и в то же время обладают большой интенсивностью — хотя скачок скорости на них относительно мал, но скачок давления (а с ним и энтропии) велик. Поэтому течение газа в общем случае отнюдь не является потенциальным.

---

[1]) В области $1 \gg M_1 - 1 \gg \theta^2$ должна получаться формула (123,7) линеаризованной теории, согласно которой $C_x \sim \theta^4$; это значит, что при увеличении K функция $f(K)$ должна стремиться к постоянной.

Будем считать, что число M_1 — порядка величины $1/\theta$ или больше. Ударная волна понижает значение местного числа M, но оно во всяком случае остается порядка величины $1/\theta$ (ср. задачу 2 § 112), так что число M велико во всем пространстве.

Воспользуемся указанной в § 123 «звуковой аналогией»: трёхмерная задача о стационарном обтекании тонкого тела с переменным сечением $S(x)$ эквивалентна нестационарной двухмерной задаче об излучении звуковых волн контуром, площадь которого меняется со временем по закону $S(v_1 t)$; роль скорости звука играет при этом величина $v_1(M_1^2-1)^{-1/2}$ или при больших M_1 просто c_1. Подчеркнем, что единственное условие, обеспечивающее эквивалентность обеих задач, заключается в малости отношения δ/l, что дает возможность рассматривать небольшие вдоль длины тела кольцевые участки его поверхности как цилиндрические. При больших M_1, однако, скорость распространения излучаемых волн сравнима по величине со скоростью частиц газа в них (ср. конец § 123), и потому задача должна решаться на основе точных, нелинеаризованных уравнений.

Возмущение скорости (по сравнению со скоростью $\mathbf{v}_1$ натекающего потока) мало уже при всяком сверхзвуковом обтекании тонкого заостренного тела. При гиперзвуковом обтекании дополнительно еще возмущение продольной скорости мало по сравнению с возникающими поперечными скоростями:

$$v_y \sim v_z \sim v_1\theta, \qquad v_x - v_1 \sim v_1\theta^2. \tag{127,1}$$

Изменения же давления и плотности отнюдь не малы:

$$\frac{p-p_1}{p_1} \sim M_1^2\theta^2, \qquad \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1} \sim 1, \tag{127,2}$$

причем изменение давления может быть даже (при $M_1\theta \gg 1$) сколь угодно большим (ср. задачу 2 § 112).

Звуковая аналогия относится, очевидно, только к двухмерной задаче о движении в плоскости y, z, перпендикулярной направлению натекающего потока. В этой двухмерной задаче линейная скорость источника звука — порядка величины $v_1\theta$; кроме нее в задачу входят в качестве независимых параметров еще только скорость звука c_1 и размеры источника δ (и параметр плотности ρ_1)[1]. Из них можно составить всего одну без-

[1]) Мы имеем в виду, конечно, не только уравнения движения газа, но и граничные условия к ним на поверхности тела и условия, которые должны выполняться на ударных волнах. Газ предполагается политропным, так что его газодинамические свойства зависят только от безразмерного параметра γ; получаемое ниже правило подобия не определяет, однако, характера зависимости течения от этого параметра.

Следует отметить, что при обтекании с $M_1 \gg 1$ газ сильно нагревается, в результате чего могут существенно измениться его термодинамические свойства. Поэтому количественный смысл формул для политропного газа (т. е. в предположении постоянства его теплоемкости) для гиперзвуковых скоростей фактически ограничен.

размерную комбинацию

$$K = M_1 \theta, \tag{127,3}$$

которая и является критерием подобия [1]). В качестве масштабов длины для координат y, z и масштаба времени надо при этом взять величины соответствующей размерности, составленные из тех же параметров, например, δ и $\delta / v_1 \theta = l / v_1$; естественным же параметром для координаты x является длина тела l. Тогда можно утверждать, что

$$v_y = v_1 \theta v'_y, \quad v_z = v_1 \theta v'_z, \quad p = \rho_1 v_1^2 \theta^2 p', \quad \rho = \rho_1 \rho', \tag{127,4}$$

где v'_y, v'_z, p', ρ' — функции безразмерных переменных x/l, y/δ, z/δ и параметра K; при этом в виду (127, 1—2) можно утверждать, что эти функции — порядка единицы [2]).

Сила сопротивления F_x вычисляется как интеграл

$$F_x = \oint p \, dy \, dz,$$

взятый по всей поверхности тела (в силу граничного условия $v_n = 0$, член $v_x(\mathbf{vn})$ в плотности потока импульса обращается в нуль на поверхности тела; $\mathbf{n}$ — нормаль к этой поверхности). Перейдя к безразмерным переменным согласно (127,4), получим коэффициент сопротивления C_x (определенный согласно (123,6)) в виде

$$C_x = 2\theta^4 \oint p' \, dy' \, dz'.$$

Оставшийся интеграл — функция безразмерного параметра K. Таким образом,

$$C_x = \theta^4 f(K). \tag{127,5}$$

Такой же самый закон подобия получается, очевидно, и в плоском случае — для обтекания тонкого крыла бесконечной протяженности. Для коэффициентов сопротивления и подъемной силы получаются при этом формулы вида

$$C_x = \theta^3 f_x(K), \qquad C_y = \theta^2 f_y(K). \tag{127,6}$$

При применении законов (127,5—6) следует помнить, что подобие течений предполагает, что форма, размеры и ориентация

---

[1]) Если не предполагать M_1 большим, то получилось бы правило подобия с параметром $K = \theta \sqrt{M_1^2 - 1}$. Оно, однако, не представляет интереса, поскольку при небольших M_1 линеаризованная теория в действительности полностью определяет зависимость всех величин от этого параметра.

[2]) Закон подобия для гиперзвукового обтекания сформулирован *Цянь Сюэ-сэнем* (*H. S. Tsien*, 1946). Его связь со «звуковой аналогией», распространенной на нелинейную задачу, указана *Хейзом* (*W. D. Hayes*, 1947); в специальной литературе эту аналогию называют «поршневой».

обтекаемых тел относительно натекающего потока получаются друг из друга только изменением масштаба δ вдоль осей y, z и масштаба l вдоль оси x. Это значит, в частности, что если отличен от нуля угол атаки α, то для подобных конфигураций отношение α/θ должно быть одинаковым.

При $K_1 \to \infty$ функции этого параметра в (127,5—6) стремятся к постоянным пределам. Это утверждение является следствием существования предельного (при $M_1 \to \infty$) режима обтекания, свойства которого в существенной области течения не зависят от M_1 (*С. В. Валландер*, 1947; *K. Oswatitsch*, 1951). Под «существенной» подразумевается область течения между передней, наиболее интенсивной, частью головной ударной волны и поверхностью обтекаемого тела, не слишком далеко от его передней части (подчеркнем, что именно эта область, с наибольшим давлением, определяет действующие на тело силы). Если описывать течение «приведенными» скоростью v/v_1, давлением $p/\rho_1 v_1^2$ и плотностью ρ/ρ_1 как функциями безразмерных координат, то картина обтекания тела заданной формы в указанной области оказывается в пределе независящей от M_1. Дело в том, что, будучи выраженными через эти переменные, оказываются независящими от M_1 не только гидродинамические уравнения и граничные условия на поверхности обтекаемого тела, но и все условия на поверхности ударной волны. Ограничение области движения «существенной» частью связано с тем, что пренебрегаемые в последних условиях величины — относительного порядка $1/M_1^2 \sin^2\varphi$, где φ — угол между $\mathbf{v}_1$ и поверхностью разрыва; на больших расстояниях, где интенсивность ударной волны мала, этот угол стремится к углу Маха $\arcsin(1/M_1) \approx 1/M_1$, так что параметр разложения перестает быть малым: $1/M_1^2 \sin^2\varphi \sim \sim 1$[1]).

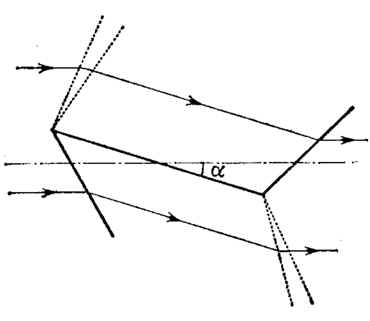

Рис. 130

Задача

Определить подъемную силу, действующую на плоское крыло бесконечного размаха, наклоненное к направлению движения под малым углом атаки α при $M_1\alpha \gtrsim 1$ (*R. D. Linnell*, 1949).

Решение. Картина обтекания выглядит, как показано на рис. 130: от переднего и от заднего краев пластинки отходят по ударной волне и по волне разрежения, в которых поток поворачивает сначала на угол α, а затем на такой же угол в обратном направлении.

[1]) Детали доказательства можно найти в книге: *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматгиз, 1959, гл. I, § 4.

Согласно акустической аналогии задача о стационарном обтекании такой пластинки эквивалентна задаче о нестационарном одномерном движении газа впереди и позади поршня, движущегося равномерно со скоростью αv_1. Впереди поршня образуется ударная волна, а позади — волна разрежения (см. задачи 1, 2 § 99). Воспользовавшись полученными там результатами, находим искомую подъемную силу как разность давлений, действующих на обе стороны пластинки. Коэффициент подъемной силы:

$$C_y = \alpha^2 \left[\frac{2}{\gamma K^2} + \frac{\gamma+1}{2} + \sqrt{\frac{4}{K^2} + \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2} \right] - \frac{2\alpha^2}{\gamma K^2} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} K \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

(где $K = \alpha M_1$). При $K \geqslant 2/(\gamma - 1)$ под пластинкой образуется область вакуума и второй член должен быть опущен. В области $1 \ll M_1 \ll 1/\alpha$ эта формула переходит в формулу $C_y = 4\alpha/M_1$, даваемую линеаризованной теорией, в соответствии с тем, что здесь перекрываются области применимости той и другой.