

(средой 1 является жидкость, а средой 2 — сгоревший газ). Условия же (4) и (5) не меняются. Вместо уравнения (9) получаем теперь

$$\Omega^2 (v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + \left[k^2 (v_1 - v_2) + \frac{gk(\rho_1 - \rho_2) + ak^3}{j} \right] v_1 v_2 = 0.$$

Условие устойчивости рассматриваемого режима заключается в требовании, чтобы корни этого уравнения имели отрицательную вещественную часть, т. е. свободный член уравнения должен быть положительным при произвольном k . Это требование приводит к условию устойчивости:

$$j^4 < \frac{4ag\rho_1^2\rho_2^2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Поскольку плотность газообразных продуктов горения мала по сравнению с плотностью жидкости ($\rho_1 \gg \rho_2$), то это условие фактически сводится к неравенству

$$j^4 < 4ag\rho_1\rho_2^2.$$

3. Определить распределение температуры в газе перед плоским фронтом пламени.

Решение. В системе координат, движущейся вместе с фронтом, распределение температуры стационарно, а газ движется со скоростью $-v_1$. Уравнение теплопроводности

$$v \nabla T = -v_1 \frac{dT}{dx} = \chi \frac{d^2 T}{dx^2}$$

имеет решение

$$T = T_0 e^{-v_1 x / \chi},$$

где T_0 — температура на фронте пламени, отсчитываемая от температуры вдали от него.

§ 129. Детонация

В описанном выше режиме медленного горения его распространение по газу обуславливается нагреванием, происходящим путем непосредственной передачи тепла от горящего к еще не воспламенившемуся газу. Наряду с таким возможен и совсем иной механизм распространения горения, связанный с ударными волнами. Ударная волна вызывает при своем прохождении нагревание газа — температура газа позади волны выше, чем впереди нее. Если интенсивность ударной волны достаточно велика, то вызываемое ею повышение температуры может оказаться достаточным для того, чтобы в газе могло начаться горение. Ударная волна при своем движении будет тогда как бы поджигать газовую смесь, т. е. горение будет распространяться со скоростью, равной скорости волны, — гораздо быстрее, чем при обычном горении. Такой механизм распространения горения называют *детонацией*.

Когда через некоторое место газа проходит ударная волна, в этом месте начинается реакция, после чего она будет продолжаться здесь до тех пор, пока не сгорит весь газ в этом месте,

т. е. в течение некоторого характерного для кинетики данной реакции времени τ ¹⁾). Поэтому ясно, что за ударной волной будет следовать передвигающийся вместе с нею слой, в котором и происходит горение, причем толщина этого слоя равна произведению скорости распространения волны на время τ . Существование, что она не зависит от размеров тел, фигурирующих в данной конкретной задаче. Поэтому при достаточно больших характерных размерах задачи можно рассматривать ударную волну вместе со следующей за ней областью горения как одну поверхность разрыва, отделяющую сгоревший газ от несгоревшего. О такой «поверхности разрыва» мы будем говорить как о *детонационной волне*.

На детонационной волне должны выполняться условия непрерывности плотностей потоков массы, энергии и импульса и остаются справедливыми все выведенные ранее для ударных волн соотношения (85,1—10), являющиеся следствием одних только этих условий. Остается, в частности, справедливым уравнение

$$\omega_1 - \omega_2 + \frac{V_1 + V_2}{2} (p_2 - p_1) = 0 \quad (129,1)$$

(буквы с индексом 1 будут везде относиться к исходному, несгоревшему, газу, а с индексом 2 — к продуктам горения). Кривую зависимости p_2 от V_2 , определяемую этим уравнением, будем называть *детонационной адиабатой*. В противоположность рассматривавшейся ранее ударной адиабате эта кривая не проходит через исходную заданную точку p_1, V_1 . Свойство ударной адиабаты проходить через эту точку было связано с тем, что ω_1 и ω_2 были одинаковыми функциями соответственно от p_1, V_1 и p_2, V_2 , что теперь ввиду химического различия обоих газов не имеет места. На рис. 132 сплошной линией изображена детонационная адиабата. Через точку p_1, V_1 проведена пунктиром в качестве вспомогательной кривой обычная ударная адиабата для исходной горючей смеси. Детонационная адиабата всегда расположена над ударной в связи с тем, что при горении развивается высокая температура и давление газа увеличивается по сравнению с тем, которое имел бы несгоревший газ при том же удельном объеме.

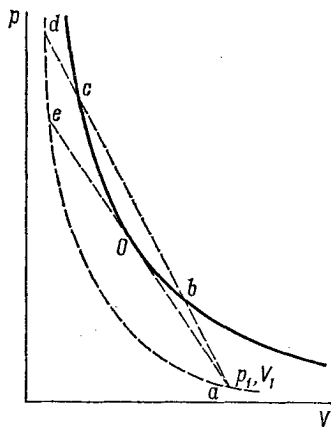


Рис. 132

¹⁾ Это время, однако, само зависит от интенсивности ударной волны: оно быстро убывает с ростом интенсивности волны в связи с увеличением скорости протекания реакции при повышении температуры,

Для плотности потока вещества имеет место прежняя формула (85,6)

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}, \quad (129,2)$$

так что графически $-j^2$ есть по-прежнему тангенс угла наклона к оси абсцисс хорды, проведенной из точки p_1, V_1 в произвольную точку p_2, V_2 детонационной адиабаты (например, хорда ac на рис. 132). Из чертежа сразу видно, что j^2 не может быть меньше значения, соответствующего наклону касательной aO . Поток j представляет собой не что иное, как количество сгорающего в единицу времени вещества (отнесенное к 1 см^2 поверхности детонационной волны); мы видим, что при детонации это количество не может быть меньше определенного предела j_{\min} (зависящего от начального состояния исходного газа).

Формула (129,2) является следствием одних лишь условий непрерывности потоков массы и импульса. Поэтому уравнение (129,2) справедливо (при заданном исходном состоянии газа) не только для окончательного состояния продуктов горения, но и для всех промежуточных состояний, в которых выделилась еще лишь часть энергии реакции¹⁾. Другими словами, давление p и удельный объем V вещества во всех этих состояниях связаны друг с другом линейным соотношением

$$p = p_1 + j^2(V_1 - V), \quad (129,3)$$

которое графически изображается точками хорды ad (В. А. Михельсон, 1890).

Проследим теперь (следуя Я. Б. Зельдовичу, 1940) за ходом изменения состояния вещества вдоль слоя конечной ширины, которым в действительности является детонационная волна. Передний фронт детонационной волны представляет собой истинную ударную волну в газе I (исходной горючей смеси). В ней вещество подвергается сжатию и нагреванию, приводящему его в состояние, изображающееся точкой d (рис. 132) на ударной адиабате газа I . В сжатом веществе начинается химическая реакция, по мере протекания которой состояние вещества изображается точкой, передвигающейся вниз по хорде da ; при этом выделяется тепло, вещество расширяется, а его давление падает. Так продолжается до тех пор, пока не закончится горение и не выделится все тепло реакции. Этому моменту соответствует точка c , лежащая на детонационной адиабате, изображающей конечные состояния продуктов горения. Что же касается нижней точки b пересечения хорды ad с детонационной адиабатой, то

¹⁾ Здесь предполагается, что диффузией и вязкостью в зоне горения можно пренебречь, так что перенос массы и импульса осуществляется только за счет гидродинамического движения.

она оказывается недостижимой для вещества, в котором горение вызвано его сжатием и разогреванием в ударной волне¹⁾.

Таким образом, мы приходим к важному результату, что детонации отвечает не вся кривая детонационной адиабаты, а лишь ее верхняя часть, лежащая над точкой O , в которой адиабата касается прямой, проведенной из начальной точки a .

В § 87 было показано, что в точке, где $d(j^2)/dp_2 = 0$ (т. е. хорда 12 касается ударной адиабаты), скорость v_2 совпадает с соответствующим значением скорости звука c_2 . Этот результат был получен исходя из одних только законов сохранения на поверхности разрыва, и потому в полной мере применим и к детонационной волне. На обычной ударной адиабате для одного газа таких точек нет (как это было показано там же). На детонационной же адиабате такая точка имеется — точка O . Одновременно с равенством $v_2 = c_2$ в такой точке имеет место также и неравенство (87,10) $d(v_2/c_2)/dp_2 < 0$, а потому при больших p_2 , т. е. над точкой O , скорость $v_2 < c_2$. Поскольку детонации соответствует именно верхняя часть адиабаты над точкой O , то мы приходим к результату, что

$$v_2 \leq c_2, \quad (129,4)$$

т. е. детонационная волна движется относительно остающегося непосредственно за нею газа со скоростью, равной или меньшей скорости звука; равенство $v_2 = c_2$ имеет место для детонации, соответствующей точке O (точка *Чепмена — Жуге*)²⁾.

Что касается скорости волны относительно газа 1 , то она всегда (в том числе и для точки O) является сверхзвуковой:

$$v_1 > c_1. \quad (129,5)$$

В этом проще всего можно убедиться непосредственно из рис. 132. Скорость звука c_1 графически определяется наклоном касательной к ударной адиабате газа 1 (пунктирная кривая) в точке a . Скорость же v_1 определяется наклоном хорды ac . Поскольку все рассматриваемые хорды идут круче указанной касательной, то всегда $v_1 > c_1$. Перемещаясь со сверхзвуковой скоростью, детонационная волна, как и ударная волна, никак не влияет на состояние находящегося перед нею газа. Скорость v_1 перемещения волны относительно исходного неподвижного газа и есть та скорость, о которой надо говорить как о скорости пространства детонации в горючей смеси.

¹⁾ Для полноты рассуждений следует также указать, что скачкообразный переход из состояния c в состояние b в еще одной ударной волне тоже невозможен, так как газ пересекал бы такую волну в направлении от большего давления к меньшему, что невозможно.

²⁾ Напомним, что под скоростями v_1 , v_2 везде подразумеваются скорости в нормальном к поверхности разрыва направлении.

Поскольку $v_1/V_1 = v_2/V_2 \equiv j$, а $V_1 > V_2$, то $v_1 > v_2$. Разность же $v_1 - v_2$ есть скорость движения продуктов горения относительно несгоревшего газа. Эта разность положительна, т. е. продукты горения движутся в сторону распространения детонационной волны.

Отметим еще следующее обстоятельство. В том же § 87 было показано, что $\frac{ds_2}{d(j^2)} > 0$. Поэтому в точке, где j^2 имеет минимум, минимально также и s_2 . Такой точкой является как раз точка O , и мы заключаем, что она соответствует наименьшему значению энтропии s_2 на детонационной адиабате. Энтропия s_2 имеет экстремум в точке O также и если следить за изменением состояния вдоль прямой ae (поскольку наклоны кривой и касательной в точке O совпадают). Этот экстремум, однако, является максимумом (*В. А. Михельсон*). Действительно, перемещению от точки e к O соответствует изменение состояния по мере протекания в сжатой смеси реакции горения, сопровождающейся выделением тепла и ростом энтропии; переход же из O в a соответствовал бы эндотермическому превращению продуктов горения в исходное вещество, обладающее меньшей энтропией.

Если детонация вызывается ударной волной, возникшей от какого-либо постороннего источника и падающей на горючую смесь, то такой детонации может соответствовать любая точка, лежащая на верхней части детонационной адиабаты. В особенности интересна, однако, детонация, возникающая самопроизвольно, в результате самого процесса горения. В следующем параграфе мы увидим, что в ряде важных случаев такая детонация непременно должна соответствовать точке Чепмена — Жуге, так что скорость детонационной волны относительно остающихся непосредственно за ней продуктов горения равна как раз скорости звука, а скорость относительно исходного газа $v_1 = jV_1$ имеет наименьшее возможное значение¹⁾.

Выведем теперь соотношения между различными величинами в детонационной волне в политропном газе. Подставляя в общее уравнение (129,1) тепловую функцию в виде

$$\omega = \omega_0 + c_p T = \omega_0 + \frac{\gamma p V}{\gamma - 1},$$

получаем:

$$\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} p_2 V_2 - \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} p_1 V_1 - V_1 p_2 + V_2 p_1 = 2q, \quad (129,6)$$

где посредством $q = \omega_{01} - \omega_{02}$ опять обозначена теплота реакции (приведенная к абсолютному нулю температуры). Определяемая

¹⁾ Это утверждение было высказано гипотетически Чепменом (*D. L. Chapman*, 1899) и Жуге (*E. Jouguet*, 1905), а его теоретическое обоснование дано Я. Б. Зельдовичем (1940) и затем независимо Нейманом (*J. von Neumann*, 1942) и Дерингом (*W. Döring*, 1943).

этим уравнением кривая $p_2(V_2)$ является равнобочной гиперболой. При $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ отношение плотностей стремится к конечному пределу

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1};$$

это — наибольшее сжатие вещества, которое может быть достигнуто в детонационной волне.

Формулы сильно упрощаются в важном случае сильных детонационных волн, получающихся, когда выделяющаяся теплота реакции велика по сравнению с внутренней тепловой энергией исходного газа, т. е. $q \gg c_{v1}T_1$. В этом случае можно пренебречь в (129,6) членами, содержащими p_1 , и получается

$$p_2 \left(\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} V_2 - V_1 \right) = 2q. \quad (129,7)$$

Рассмотрим более подробно детонацию, соответствующую точке Чепмена — Жуге, представляющую согласно сказанному выше особый интерес. В этой точке имеем:

$$j^2 = \frac{c_2^2}{V_2^2} = \frac{\gamma_2 p_2}{V_2}.$$

Из этого соотношения и соотношения (129,2) можно выразить p_2 и V_2 в виде

$$p_2 = \frac{p_1 + j^2 V_1}{\gamma_2 + 1}, \quad V_2 = \frac{\gamma_2 (p_1 + j^2 V_1)}{j^2 (\gamma_2 + 1)}. \quad (129,8)$$

Подставляя теперь эти выражения в уравнение (129,6) и вводя вместо потока j скорость $v_1 = jV_1$, получаем после простого приведения следующее биквадратное уравнение для v_1 :

$$v_1^4 - 2v_1^2 \left[(\gamma_2^2 - 1)q + (\gamma_2^2 - \gamma_1) c_{v1} T_1 \right] + \gamma_2^2 (\gamma_1 - 1)^2 c_{v1}^2 T_1^2 = 0$$

(температура введена здесь согласно $T = pV / (c_p - c_v) = pV / c_v (\gamma - 1)$). Отсюда имеем¹⁾:

$$v_1 = \left\{ \frac{\gamma_2 - 1}{2} [(\gamma_2 + 1)q + (\gamma_1 + \gamma_2) c_{v1} T_1] \right\}^{1/2} + \left\{ \frac{\gamma_2 + 1}{2} [(\gamma_2 - 1)q + (\gamma_2 - \gamma_1) c_{v1} T_1] \right\}^{1/2}. \quad (129,9)$$

¹⁾ Если $x^4 - 2px^2 + q = 0$, то

$$x = \sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q}} = \sqrt{\frac{p + \sqrt{q}}{2}} \pm \sqrt{\frac{p - \sqrt{q}}{2}}.$$

Два знака перед корнем соответствуют в данном случае тому, что из точки a можно провести две касательные к детонационной адиабате — одну вверх, как это изображено на рисунке, а другую вниз. Интересующая нас верхняя касательная является более крутой и соответственно этому мы выбираем знак плюс перед корнем.

Эта формула определяет скорость распространения детонации по температуре T_1 исходной газовой смеси.

Перепишем формулы (129,8) в виде

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1^2 + (\gamma_1 - 1) c_{v1} T_1}{(\gamma_2 + 1) (\gamma_1 - 1) c_{v1} T_1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2 [v_1^2 + (\gamma_1 - 1) c_{v1} T_1]}{(\gamma_2 + 1) v_1^2}. \quad (129,10)$$

Вместе с (129,9) они определяют отношения давлений и плотностей продуктов горения и исходного вещества по температуре T_1 .

Скорость v_2 вычисляется как $v_2 = v_1 V_2 / V_1$ с помощью формул (129,9) и (129,10). В результате вычисления получается:

$$v_2 = \left\{ \frac{\gamma_2 - 1}{2} [(\gamma_2 + 1) q + (\gamma_1 + \gamma_2) c_{v1} T_1] \right\}^{1/2} + \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \left\{ \frac{\gamma_2 + 1}{2} [(\gamma_2 - 1) q + (\gamma_2 - \gamma_1) c_{v1} T_1] \right\}^{1/2}. \quad (129,11)$$

Разность же $v_1 - v_2$, т. е. скорость сгоревшего газа относительно несгоревшего, равна

$$v_1 - v_2 = \left\{ \frac{2 [(\gamma_2 - 1) q + (\gamma_2 - \gamma_1) c_{v1} T_1]}{\gamma_2 + 1} \right\}^{1/2}. \quad (129,12)$$

Температура продуктов горения вычисляется по формуле

$$c_{v2} T_2 = \frac{v_2^2}{\gamma_2 (\gamma_2 - 1)}. \quad (129,13)$$

(напомним, что $v_2 = c_2$).

Все эти довольно сложные формулы очень упрощаются для сильных детонационных волн. В этом случае получаем для скоростей следующие простые формулы:

$$v_1 = \sqrt{2(\gamma_2^2 - 1)q}, \quad v_1 - v_2 = \frac{v_1}{\gamma_2 + 1}. \quad (129,14)$$

Термодинамическое же состояние продуктов горения определяется формулами

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2(\gamma_2 - 1)}{\gamma_1 - 1} \frac{q}{c_{v1} T_1} = \frac{\gamma_1 v_1^2}{(\gamma_2 + 1) c_1^2},$$

$$T_2 = \frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \frac{q}{c_{v2}}. \quad (129,15)$$

Сравнив формулы (129,15) с аналогичными формулами (128,5) для медленного горения, можно отметить, что в предельном случае $q \gg c_{v1} T_1$ отношение температур продуктов горения, которые они приняли бы соответственно после медленного

горения и после детонации, равно

$$\frac{T_2^{\text{дет}}}{T_2^{\text{гор}}} = \frac{2\gamma_2^2}{\gamma_2 + 1}.$$

Это отношение всегда больше единицы (так как всегда $\gamma_2 > 1$).

Задача

Определить термодинамические величины газа непосредственно за ударной волной, являющейся передним фронтом сильной детонационной волны, соответствующей точке Чепмена — Жуге.

Решение. Непосредственно за ударной волной имеется еще негоревшая газовая смесь, и ее состояние изображается точкой e пересечения продолжения касательной aO (рис. 132) с изображенной пунктиром ударной адиабатой газа I . Обозначая координаты этой точки посредством ρ'_1 , V'_1 , имеем, с одной стороны, согласно уравнению (89,1) ударной адиабаты газа I :

$$\frac{V'_1}{V_1} = \frac{(\gamma_1 + 1)\rho_1 + (\gamma_1 - 1)\rho'_1}{(\gamma_1 - 1)\rho_1 + (\gamma_1 + 1)\rho'_1}$$

и, с другой стороны,

$$\frac{\rho'_1 - \rho_1}{V_1 - V'_1} = j^2 = \frac{v_1^2}{V_1^2}.$$

Взяв для v_1 значение из (129,14), получим:

$$\rho'_1 = \rho_1 \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{\gamma_1^2 - 1} \frac{q}{c_{v1} T_1}, \quad V'_1 = V_1 \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}, \quad T'_1 = \frac{q}{c_{v1}} \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)^2}.$$

Отношение давления ρ'_1 к давлению ρ_2 позади детонационной волны равно

$$\frac{\rho'_1}{\rho_2} = 2 \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1 + 1}.$$

§ 130. Распространение детонационной волны

Рассмотрим теперь несколько конкретных случаев распространения детонационных волн в газе, который первоначально покоился. Начнем с детонации в газе, находящемся в трубе, один из концов которой ($x = 0$) закрыт. Граничные условия в этом случае требуют равенства нулю скорости газа как впереди детонационной волны (детонационная волна не влияет на состояние газа, находящегося перед нею), так и на закрытом конце трубы. Поскольку при прохождении детонационной волны газ приобретает отличную от нуля скорость, то в пространстве между волной и закрытым концом трубы должно происходить падение его скорости. Для того чтобы определить возникающую при этом картину движения газа, замечаем, что в рассматриваемой задаче нет никаких параметров длины, которые бы харак-