

горения и после детонации, равно

$$\frac{T_2^{\text{дет}}}{T_2^{\text{гор}}} = \frac{2\gamma_2^2}{\gamma_2 + 1}.$$

Это отношение всегда больше единицы (так как всегда $\gamma_2 > 1$).

Задача

Определить термодинамические величины газа непосредственно за ударной волной, являющейся передним фронтом сильной детонационной волны, соответствующей точке Чепмена — Жуге.

Решение. Непосредственно за ударной волной имеется еще негоревшая газовая смесь, и ее состояние изображается точкой e пересечения продолжения касательной aO (рис. 132) с изображенной пунктиром ударной адиабатой газа I . Обозначая координаты этой точки посредством ρ'_1, V'_1 , имеем, с одной стороны, согласно уравнению (89,1) ударной адиабаты газа I :

$$\frac{V'_1}{V_1} = \frac{(\gamma_1 + 1)\rho_1 + (\gamma_1 - 1)\rho'_1}{(\gamma_1 - 1)\rho_1 + (\gamma_1 + 1)\rho'_1}$$

и, с другой стороны,

$$\frac{\rho'_1 - \rho_1}{V_1 - V'_1} = j^2 = \frac{v_1^2}{V_1^2}.$$

Взяв для v_1 значение из (129,14), получим:

$$\rho'_1 = \rho_1 \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{\gamma_1^2 - 1} \frac{q}{c_{v1} T_1}, \quad V'_1 = V_1 \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}, \quad T'_1 = \frac{q}{c_{v1}} \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)^2}.$$

Отношение давления ρ'_1 к давлению ρ_2 позади детонационной волны равно

$$\frac{\rho'_1}{\rho_2} = 2 \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1 + 1}.$$

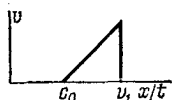
§ 130. Распространение детонационной волны

Рассмотрим теперь несколько конкретных случаев распространения детонационных волн в газе, который первоначально покоился. Начнем с детонации в газе, находящемся в трубе, один из концов которой ($x = 0$) закрыт. Граничные условия в этом случае требуют равенства нулю скорости газа как впереди детонационной волны (детонационная волна не влияет на состояние газа, находящегося перед нею), так и на закрытом конце трубы. Поскольку при прохождении детонационной волны газ приобретает отличную от нуля скорость, то в пространстве между волной и закрытым концом трубы должно происходить падение его скорости. Для того чтобы определить возникающую при этом картину движения газа, замечаем, что в рассматриваемой задаче нет никаких параметров длины, которые бы харак-

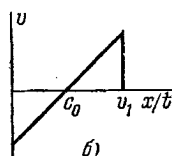
теризовали условия движения вдоль длины трубы (оси x). Мы видели в § 99, что в таком случае изменение скорости газа может произойти либо в ударной волне (разделяющей две области постоянной скорости), либо в автомодельной волне разрежения.

Предположим сначала, что детонационная волна не соответствует точке Чепмена — Жуге. Тогда скорость ее распространения относительно остающегося за нею газа $v_2 < c_2$. Легко видеть, что в таком случае за детонационной волной не могут следовать ни ударная волна, ни слабый разрыв (передний фронт волны разрежения). Действительно первая должна перемещаться относительно находящегося перед нею газа со скоростью, превышающей c_2 , а второй — со скоростью, равной c_2 ; в обоих случаях они перегоняли бы детонационную волну. Таким образом, при сделанном предположении оказывается невозможным уменьшить скорость движущегося за детонационной волной газа, т. е. невозможно удовлетворить граничному условию при $x = 0$.

Удовлетворить этому условию можно лишь с детонационной волной, соответствующей точке Чепмена — Жуге. В этом случае $v_2 = c_2$, и за детонационной волной может следовать волна разрежения. Возникнув в точке $x = 0$ одновременно с началом детонации, волна разрежения будет иметь передний фронт совпадающим с детонационной волной.



а)



б)

Рис. 133

Таким образом, мы приходим к существенному результату, что детонационная волна, распространяющаяся по трубе в подожженном у ее закрытого конца газе, должна соответствовать точке Чепмена — Жуге. Она движется относительно находящегося непосредственно за нею газа со скоростью, равной местной скорости звука. От самой детонационной волны начинается область волны разрежения, в которой скорость газа (относительно трубы) монотонно падает до нуля. Точка, в которой скорость впервые обращается в нуль, является слабым разрывом. Позади слабого разрыва газ неподвижен (рис. 133, а).

Рассмотрим теперь детонационную волну, распространяющуюся по трубе от открытого ее конца. Давление газа, находящегося перед детонационной волной, должно быть равно первоначальному давлению исходного газа, совпадающему, очевидно, с внешним давлением. Ясно, что и в этом случае где-то позади детонационной волны должно происходить падение скорости. Если бы на всем протяжении от начала трубы до волны скорость газа была постоянной, то это значило бы, что на открытом конце трубы происходит засасывание газа извне; между тем давление газа в трубе было бы выше внешнего (так как за детонационной волной давление выше, чем перед нею), и потому такое засасыва-

ние невозможно. По таким же причинам, как и в предыдущем случае, детонационная волна должна соответствовать точке Чепмена — Жуге. В результате получается картина движения, схематически изображенная на рис. 133, б. Непосредственно за детонационной волной начинается область автомодельной волны разрежения, в которой скорость монотонно падает по направлению к началу трубы, причем меняет в некоторой точке знак. Это значит, что в некотором начальном участке трубы газ будет двигаться в направлении к открытому концу трубы, из которого и будет вытекать наружу; выходная скорость этого вытекания равна местному значению скорости звука, а выходное давление превышает внешнее (мы видели в § 97, что такой режим вытекания возможен)¹⁾.

Рассмотрим, далее, важный случай сферической детонационной волны, расходящейся от точки начального воспламенения газа как из центра (Я. Б. Зельдович, 1942). Поскольку газ должен быть неподвижным как впереди детонационной волны, так и вблизи центра, то и здесь скорость газа должна падать по направлению от волны к центру. Как и в случае движения в трубе, здесь также нет никаких заданных характерных параметров размерности длины. Поэтому возникающее движение газа должно быть автомодельным, с той разницей, что роль координаты x играет теперь расстояние r от центра; таким образом, все величины должны быть функциями только отношения r/t^2 .

Для центрально-симметричного движения ($v_r = v(r, t)$, $v_\varphi = v_\theta = 0$) уравнения движения имеют следующий вид. Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0;$$

уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

и уравнение сохранения энтропии

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial r} = 0.$$

Вводя переменную $\xi = r/t$ ($\xi > 0$) и считая, что все величины являются функциями только от ξ , получим следующую систему

¹⁾ Мы везде полностью отвлекаемся от тепловых потерь, которыми может сопровождаться распространение детонационной волны. Как и в случае медленного горения, эти потери могут сделать распространение детонации невозможным. При детонации в трубе источником потерь являются в первую очередь отвод тепла через стенки трубы и замедление газа благодаря трению.

²⁾ Безразмерную автомодельную переменную в этой задаче можно определить как $r/t \sqrt{q}$, где характерный постоянный параметр q — теплота реакции на единицу массы.

уравнений:

$$(\xi - v) \frac{\rho'}{\rho} = v' + \frac{2v}{\xi}, \quad (130,1)$$

$$(\xi - v) v' = \frac{p'}{\rho}, \quad (130,2)$$

$$(\xi - v) s' = 0 \quad (130,3)$$

($'$ означает дифференцирование по ξ). Положить здесь $v = \xi$ нельзя, так как это противоречит первому уравнению. Поэтому из третьего сразу имеем $s' = 0$, т. е.

$$s = \text{const.}$$

Имея в виду постоянство энтропии, можем написать $p' = c^2 \rho'$, и уравнение (130,2) приобретает вид

$$(\xi - v) v' = c^2 \frac{\rho'}{\rho}. \quad (130,4)$$

Подставив сюда ρ'/ρ из (130,1), получаем следующее соотношение:

$$\left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1 \right] v' = \frac{2v}{\xi}. \quad (130,5)$$

Уравнения (130,4) и (130,5) не могут быть проинтегрированы в аналитическом виде, но свойства их решения могут быть исследованы.

Область, в которой газ совершает движение рассматриваемого типа, ограничена, как мы увидим ниже, двумя сферами, из которых наружная представляет собой поверхность самой детонационной волны, а внутренняя является поверхностью слабого разрыва, причем скорость обращается на ней в нуль.

Изучим прежде всего свойства решения вблизи точки, где v обращается в нуль. Легко видеть, что в точке, где $v = 0$, непременно должно быть одновременно $\xi = c$:

$$v = 0, \quad \xi = c. \quad (130,6)$$

Действительно, при стремлении v к нулю $\ln v$ стремится к $-\infty$; поэтому, когда ξ , уменьшаясь, стремится к значению, соответствующему внутренней границе рассматриваемой области, производная $d \ln v / d\xi$ должна стремиться к $+\infty$. Между тем из (130,5) имеем при $v = 0$

$$\frac{d \ln v}{d\xi} = \frac{2}{\xi (\xi^2/c^2 - 1)}.$$

Это выражение может стремиться к $+\infty$ лишь при $\xi \rightarrow c$.

В самом начале координат радиальная скорость должна обратиться в нуль уже непосредственно в силу симметрии. Таким образом, вокруг начала координат будет находиться область не-

подвижного газа (область внутри сферы $\xi = c_0$, где c_0 — значение скорости звука при $v = 0$).

Выясним свойства функции $v(\xi)$ вблизи точки (130,6). Из (130,5) имеем:

$$v \frac{d\xi}{dv} = \frac{\xi}{2} \left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1 \right].$$

С точностью до величин первого порядка малости (каковыми являются v , $\xi - c_0$, $c - c_0$) получаем после простого вычисления:

$$v \frac{d(\xi - c_0)}{dv} = (\xi - c_0) - (v + c - c_0).$$

Согласно (102,1) имеем $v + c - c_0 = \alpha_0 v$, где α_0 — положительная постоянная (значение при $v = 0$ величины (102,2)), и мы получаем для $\xi - c_0$ как функции от v следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$v \frac{d(\xi - c_0)}{dv} - (\xi - c_0) = -\alpha_0 v.$$

Решение этого уравнения есть

$$\xi - c_0 = \alpha_0 v \ln \frac{\text{const}}{v}. \quad (130,7)$$

Этим определяется в неявном виде функция $v(\xi)$ вблизи точки, где $v = 0$.

Мы видим, что внутренняя граница является поверхностью слабого разрыва: скорость обращается на ней в нуль, не испытывая скачка. Кривая зависимости $v(\xi)$ имеет на этой границе горизонтальную касательную ($dv/d\xi = 0$). Мы имеем здесь дело со слабым разрывом весьма своеобразного типа: первая производная на нем непрерывна, а все производные высших порядков обращаются в бесконечность (в чем легко убедиться на основании (130,7)). Отношение r/t при $v = 0$ есть, очевидно, не что иное, как скорость перемещения границы области относительно газа; согласно (130,6) она равна местному значению скорости звука, как и должно быть для слабого разрыва.

Далее имеем при малых v согласно (130,7):

$$\xi - v - c = (\xi - c_0) - (v + c - c_0) = \alpha_0 v \left(\ln \frac{\text{const}}{v} - 1 \right).$$

Эта величина при малых v положительна:

$$\xi - v - c > 0.$$

Покажем, что нигде внутри области рассматриваемого движения разность $(\xi - v) - c$ не может изменить знак. Рассмотрим точку, в которой было бы

$$\xi - v = c, \quad v \neq 0. \quad (130,8)$$

Из (130,5) видно, что в такой точке производная v' должна обратиться в бесконечность, т. е.

$$\frac{d\xi}{dv} = 0. \quad (130,9)$$

Что касается второй производной $d^2\xi/dv^2$, то простое вычисление дает для нее (при условиях (130,8) и (130,9) значение

$$\frac{d^2\xi}{dv^2} = -\frac{\alpha_0}{c_0} \frac{\xi}{v}.$$

отличное от нуля. Но это значит, что в рассматриваемой точке ξ как функция от v имеет максимум. Иначе можно сказать, что функция $v(\xi)$ существует лишь при ξ , лежащих только по нижнюю сторону от значения, соответствующего условиям (130,8); это значение является второй границей, за которую не может простирается рассматриваемая область. Из того, что $\xi - v - c$ может обратиться в нуль только на границе области, а при малых v во всяком случае $\xi - v - c > 0$, мы заключаем, что

$$\xi - v > c \quad (130,10)$$

везде внутри этой области.

Теперь уже легко видеть, что реальная передняя граница области рассматриваемого движения должна совпадать с точкой, где выполняются условия (130,8). Для этого замечаем, что разность $r/t - v$, где r — координата границы, есть не что иное, как скорость перемещения этой границы относительно остающегося за ней газа. Но поверхность, на которой $r/t - v > c$, не может быть поверхностью детонационной волны (на которой должно быть $r/t - v \leq c$). Поэтому мы приходим к результату, что передней границей рассматриваемой области может быть только точка, в которой имеет место (130,8). На этой границе v падает скачком до нуля, а скорость ее распространения относительно остающегося непосредственно за нею газа равна местной скорости звука. Это значит, что детонационная волна должна соответствовать точке Чепмена — Жуге детонационной адиабаты¹⁾.

Мы приходим к следующей картине движения газа при сферическом распространении детонации. Детонационная волна, как и при детонации в трубе, соответствует точке Чепмена — Жуге. Непосредственно за нею начинается область сферической автоматической волны разрежения, в которой скорость газа падает до нуля. Падение происходит монотонно, так как согласно (130,5) производная $dv/d\xi$ может обратиться в нуль лишь в той точке, где одновременно $v = 0$. Вместе со скоростью монотонно убывают также и давление и плотность газа (согласно (130,4)

¹⁾ Отметим для полноты рассуждений, что $v = \text{const}$ не является решением уравнений центрально-симметрического движения. Поэтому за детонационной волной не может следовать область постоянной скорости.

и (130,10) производная p' имеет везде тот же знак, что и v'). Кривая зависимости v от r/t имеет на передней границе вертикальную (согласно (130,9)), а на внутренней — горизонтальную касательную (рис. 134). Внутренняя граница является слабым разрывом, вблизи которого зависимость v от r/t определяется уравнением (130,7). Внутри сферы, ограниченной поверхностью слабого разрыва, газ неподвижен. Общее количество (по массе) неподвижного вещества, однако, весьма незначительно (ср. соображения, приведенные в конце § 106).

Таким образом, во всех рассмотренных типичных случаях самопроизвольного одномерного и сферического распространения детонации граничные условия в области позади

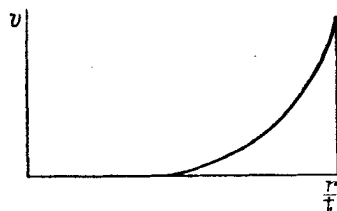


Рис. 134

детонационной волны приводят к однозначному отбору скорости последней, соответствующему точке Чепмена — Жуге (после того, как вся область детонационной адиабаты ниже этой точки была исключена по соображениям, изложенным в § 129). Осушествление в трубе постоянного сечения детонации, соответствующей расположенной выше этой точки части адиабаты, требовало бы искусственного поджатия продуктов горения движущимся со сверхзвуковой скоростью поршнем (см. задачу 3 к этому параграфу); о таких детонационных волнах говорят как о *пересжатых*.

Подчеркнем, однако, что эти выводы не имеют универсального характера, и можно представить себе случаи самопроизвольного возникновения пересжатой детонационной волны. Так, пересжатая волна возникает при переходе детонации из широкой трубки в узкую; это явление связано с тем, что когда детонационная волна доходит до места сужения, происходит ее частичное отражение, в результате чего давление продуктов горения, втекающих из широкой в узкую часть трубы, резко возрастает — ср. задачу 4 (Б. В. Айвазов, Я. Б. Зельдович, 1947)¹⁾.

По поводу изложенной в этом и предыдущем параграфах теории необходимо сделать следующее общее замечание. Структура детонационной волны предполагается в ней стационарной и однородной по ее площади; она одномерна в том смысле, что распределение всех величин в зоне горения предполагается зависящим только от одной координаты — вдоль ее ширины. Накопленные к настоящему времени экспериментальные данные свидетельствуют, однако, о том, что такая картина представляет

¹⁾ Пересжатость возникает также при распространении сходящейся цилиндрической или сферической детонационной волны — см. Зельдович Я. Б. — ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 782.

собой далеко идущую идеализацию, которая могла бы служить лишь для некоторого усредненного описания процесса; реально наблюдаемая картина обычно существенно от нее отличается. Фактически структура детонационной волны существенно нестационарна и существенно трехмерна; волна имеет вдоль своей площади мелкомасштабную, быстро меняющуюся со временем сложную структуру. Ее возникновение представляет собой результат неустойчивости, связанной прежде всего с сильной (экспоненциальной) температурной зависимостью скорости реакции — уже небольшие изменения температуры при искажении формы ударного фронта сильно отражаются на ходе реакции; эта неустойчивость выражена тем сильнее, чем больше отношение активационной энергии реакции к температуре газа (за ударной волной). В особенности наглядно неоднородность и нестационарность структуры детонационной волны проявляется в условиях, близких к пределу распространения детонации в трубе: воспламенение горючей смеси происходит в основном лишь за одиночными эксцентрично расположенными (и движущимися по спирали) резко деформированными участками ударного фронта (в таких случаях говорят о *спиновой детонации*). Разбор возможных механизмов всех этих сложных явлений не входит в задачу этой книги¹⁾.

Задачи

1. Определить движение газа при распространении детонационной волны по трубе от закрытого ее конца.

Решение. Скорости детонационной волны относительно находящегося перед ней неподвижного газа v_1 и относительно остающегося непосредственно за ней сгоревшего газа v_2 определяются по температуре T_1 по формулам (129,11—12); v_1 есть в то же время скорость перемещения волны относительно трубы, так что ее координата определяется как $x = v_1 t$. Скорость (относительно трубы) продуктов горения на детонационной волне равна $v_1 - v_2$. Скорость же v_2 совпадает с местной скоростью звука. Поскольку в автомоделной волне разрежения скорость звука связана со скоростью газа v посредством $c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} v$, то имеем:

$$v_2 = c_0 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} (v_1 - v_2),$$

откуда

$$c_0 = \frac{\gamma_2 + 1}{2} v_2 - \frac{\gamma_2 - 1}{2} v_1.$$

Для сильной детонационной волны с помощью (129,14) получаем просто $c_0 = v_1/2$. Величина c_0 и есть скорость перемещения задней границы волны

¹⁾ Дадим лишь ссылки на некоторые книги и обзорные статьи: Шелкин К. И., Трошин Я. Г. Газодинамика горения. — М.: Наука, 1963; Солоухин Р. И. Ударные волны и детонация. — М.: Наука, 1963; Солоухин Р. И. — УФН, 1963, т. 80, стр. 525; Oppenheim A. K., Soloukhin R. I. — Ann. Rev. Fluid Mech., 1973, v. 5, p. 31.

разрежения. Между обеими границами скорость меняется по линейному закону (рис. 133, а).

2. То же для трубы с открытым концом.

Решение. Скорости v_1 и v_2 определяют так же, как и в предыдущем случае; поэтому той же оказывается и скорость c_0 . Область волны разрежения простирается, однако, теперь не до точки, где $v = 0$, а до самого начала трубы ($x = 0$, рис. 133, б). Из формулы $x/t = v + c$ (99,5) видим, что газ вытекает из отверстия трубы со скоростью $v = -c$, равной местной скорости звука. Написав

$$-v = c = c_0 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} v,$$

получим поэтому для скорости вытекания газа следующее значение:

$$-v \Big|_{x=0} = \frac{2c_0}{\gamma_2 + 1}.$$

Для сильной детонационной волны эта скорость равна $v_1/(\gamma_2 + 1)$ и по величине совпадает со скоростью газа непосредственно за волной.

3. То же при распространении детонационной волны от конца трубы, закрытого поршнем, начинающим в начальный момент времени двигаться вперед с постоянной скоростью U .

Решение. Если $U < v_1$, то распределение скорости в газе имеет вид, изображенный на рис. 135, а. Скорость газа падает от значения $v_1 - v_2$ при $x/t = v_1$ до значения U при

$$\frac{x}{t} = c_0 + \frac{\gamma_2 + 1}{2} U$$

с прежним значением c_0 . Далее следует область газа, движущегося с постоянной скоростью U .

Если же $U > v_1$, то детонационная волна уже не может соответствовать точке Жуге (поршень «обгонял» бы ее). В этом случае возникает «перескакая» детонационная волна, соответствующая точке на адиабате, расположенной выше точки Жуге. Она определяется тем, что скачок скорости в ней должен быть равен как раз скорости поршня: $v_1 - v_2 = U$. Во всей области между детонационной волной и поршнем газ движется с постоянной скоростью U (рис. 135, б).

4. Определить давление, возникающее у абсолютно твердой стенки при отражении падающей на нее в нормальном направлении плоской сильной детонационной волны (К. П. Станюкович, 1946).

Решение. При падении детонационной волны на стенку возникает отраженная ударная волна, распространяющаяся в обратном направлении по продуктам горения. Вычисления в точности аналогичны приведенным в задаче 1 § 100. С теми же обозначениями, что и там, имеем в данном случае три соотношения:

$$\begin{aligned} p_2 (V_1 - V_2) &= (p_3 - p_2) (V_2 - V_3), \\ \frac{V_2}{V_1} &= \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1}, \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma_2 + 1) p_2 + (\gamma_2 - 1) p_3}{(\gamma_2 - 1) p_2 + (\gamma_2 + 1) p_3} \end{aligned}$$

(мы пренебрегаем p_1 по сравнению с p_2 , но p_2 и p_3 — одного порядка величины). Исключая объемы, получим для p_3 квадратное уравнение, причем

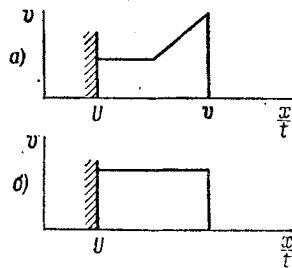


Рис. 135

должен быть выбран тот из его корней, для которого $p_3 > p_2$:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{5\gamma_2 + 1 + \sqrt{17\gamma_2^2 + 2\gamma_2 + 1}}{4\gamma_2}.$$

Отметим, что это отношение почти не зависит от значения γ_2 , меняясь всего в пределах от 2,6 до 2,3 при изменении γ_2 от 1 до ∞ .

§ 131. Соотношение между различными режимами горения

В § 129 было показано, что детонации соответствуют точки на верхней части детонационной адиабаты для данного процесса горения. Поскольку уравнение этой адиабаты есть следствие одних лишь необходимых законов сохранения массы, импульса и энергии (примененных к начальному и конечному состояниям горящего газа), то ясно, что на эту же кривую должны лечь точки, изображающие состояние продуктов реакции также и при всяком другом режиме горения, в котором зону горения можно рассматривать как некоторую «поверхность разрыва». Выясним теперь, каков именно физический смысл остальных участков этой кривой.

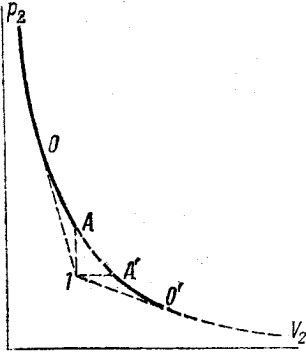


Рис. 136

Проведем через точку p_1, V_1 (точка I на рис. 136) вертикальную и горизонтальную прямые IA и IA' и две касательные IO и IO' к адиабате. Точки A, A', O, O' касания или пересечения этих прямых с кривой разделят адиабату на пять частей. Часть кривой, лежащая над точкой O , соответствует, как указано, детонации. Рассмотрим теперь другие участки кривой.

Прежде всего легко видеть, что участок AA' вовсе не имеет никакого физического смысла. Действительно, на этом участке имеем $p_2 > p_1, V_2 > V_1$, и поэтому поток вещества j оказался бы мнимым (ср. (129,2)).

В точках касания O и O' производная $d(j^2)/dp_2$ обращается в нуль; уже было указано в § 129 (со ссылкой на § 87), что в таких точках имеют одновременно место равенство $v_2 = c_2$ и неравенство $d(v_2/c_2)/dp_2 < 0$. Отсюда следует, что над точками касания $v_2 < c_2$, а под ними $v_2 > c_2$. Что касается взаимоотношения между скоростями v_1 и c_1 , то его всегда легко установить из рассмотрения наклона соответствующих хорд и касательных, подобно тому как это было сделано в § 129 для участка кривой над точкой O . В результате такого рассмотрения найдем, что на