ГЛАВА XV

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

§ 133. Тензор энергии-импульса жидкости

Необходимость в учете релятивистских эффектов в гидродинамике может быть связана не только с большой (сравнимой со скоростью света) скоростью макроскопического движения жидкости. Гидродинамические уравнения существенно меняются и в том случае, когда эта скорость не велика, но велики скорости микроскопического движения составляющих жидкость частиц.

Для вывода релятивистских уравнений гидродинамики необходимо прежде всего установить вид 4-тензора энергии-импульса движущейся жидкости T^{ik} [1]). Напомним, что $T^{00}=T_{00}$ есть плотность энергии, $T^{0\alpha}/c=-T_{0\alpha}/c$ — плотность компонент импульса, величины $T^{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}$ составляют тензор плотности потока импульса, плотность же потока энергии $cT^{0\alpha}$ отличается от плотности импульса лишь множителем c^2.

Поток импульса через элемент $d\mathfrak{f}$ поверхности тела [2]) есть не что иное, как действующая на этот элемент сила. Поэтому $T^{\alpha\beta}df_\beta$ есть α-я компонента силы, действующей на элемент поверхности. Рассмотрим некоторый элемент объема жидкости и воспользуемся системой отсчета, в которой он покоится (*локальная собственная система отсчета*, или *локальная система покоя*; значения величин в ней называют *собственными*). В такой системе отсчета справедлив закон Паскаля, т. е. давление, оказываемое данным участком жидкости одинаково по всем направлениям и везде перпендикулярно к площадке, на которую оно производится. Поэтому можно написать $T^{\alpha\beta}df_\beta=pdf_\alpha$, откуда

$$T_{\alpha\beta}=p\delta_{\alpha\beta}.$$

---

[1]) Содержание этого параграфа в значительной степени повторяет содержание II § 35 и приводится здесь для связности изложения.

Принятые в этой главе обозначения соответствуют обозначениям в II. Латинские индексы $i, k, l, \ldots$ пробегают значения 0, 1, 2, 3, причем $x^0=ct$ — временная координата (в этой главе c — скорость света). Первые буквы греческого алфавита $\alpha, \beta, \ldots$ в индексах пробегают значения 1, 2, 3, отвечающие пространственным координатам. Галилеевой метрике (специальная теория относительности) отвечает метрический тензор с компонентами $g_{00}=1$, $g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$.

[2]) Для трехмерного вектора $d\mathfrak{f}$ (и вектора скорости $\mathbf{v}$ ниже) в декартовых координатах нет необходимости различать контра- и ковариантные компоненты, и мы пишем их везде с индексами внизу. То же самое относится к трехмерному единичному тензору $\delta_{\alpha\beta}$.

Что касается компонент $T^{0\alpha}$, представляющих плотность импульса, то в локальной собственной системе отсчета они равны нулю. Компонента же T^{00} равна собственной плотности внутренней энергии жидкости, которую мы будем обозначать в этой главе посредством e.

Таким образом, в локальной системе покоя тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{ik}=\begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \qquad (133,1)$$

Легко найти теперь выражение T^{ik} в любой системе отсчета. Для этого введем 4-скорость u^i движения жидкости. В локальной системе покоя ее компоненты: $u^0=1$, $u^\alpha=0$. Выражение для T^{ik}, обращающееся в (133,1) при этих значениях u^i, есть

$$T^{ik}=wu^iu^k-pg^{ik}, \qquad (133,2)$$

где $w=e+p$ — тепловая функция единицы объема. Это и есть искомое выражение тензора энергии-импульса [1]).

Компоненты T^{ik}, написанные в трехмерном виде, равны

$$T^{\alpha\beta}=\frac{wv_\alpha v_\beta}{c^2(1-v^2/c^2)}+p\delta_{\alpha\beta},$$
$$T^{0\alpha}=\frac{wv_\alpha}{c(1-v^2/c^2)}, \qquad T^{00}=\frac{w}{1-v^2/c^2}-p=\frac{e+pv^2/c^2}{1-v^2/c^2}. \qquad (133,3)$$

Нерелятивистскому случаю соответствуют малые скорости $v\ll c$ и малые скорости внутреннего (микроскопического) движения частиц в жидкости. При совершении предельного перехода следует иметь в виду, что релятивистская внутренняя энергия e содержит в себе также и энергию покоя nmc^2 составляющих жидкость частиц (m — масса покоя отдельной частицы). Кроме того, надо учесть, что плотность числа частиц n отнесена к единице собственного объема; в нерелятивистских же выражениях плотность энергии относится к единице объема в «лабораторной» системе отсчета, в который данный элемент жидкости движется. Поэтому при предельном переходе надо заменить

$$mn\to\rho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx\rho-\frac{\rho v^2}{2c^2}.$$

где ρ — обычная нерелятивистская плотность массы. По сравнению с ρc^2 мала как нерелятивистская плотность энергии (обозначим ее $\rho\varepsilon$), так и давление.

---

[1]) Во всех формулах в этой главе под термодинамическими величинами понимаются их собственные значения. Такие величины, как e, w (и плотность энтропии σ ниже) отнесены к единице объема в локальной системе покоя.

Имея все это в виду, найдем, что предельное значение

$$T_{00} = \rho c^2 + \rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2},$$

т. е. совпадает, за вычетом ρc^2, с нерелятивистской плотностью энергии. Соответствующее предельное значение тензора $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + p\delta_{\alpha\beta},$$

т. е. совпадает, как и следовало, с обычным выражением для плотности потока импульса, который мы обозначали в § 7 посредством $\Pi_{\alpha\beta}$.

Простая связь между плотностью импульса и плотностью потока энергии (отличие в множителе c^2) теряется в нерелятивистском пределе благодаря тому, что в нерелятивистскую энергию не включается энергия покоя. Действительно, компоненты $T^{0\alpha}/c$ образуют трехмерный вектор, приближенно равный

$$\rho\mathbf{v} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\left(\rho\varepsilon + p + \frac{\rho v^2}{2}\right).$$

Отсюда видно, что предельное значение плотности импульса есть, как и следовало, просто $\rho\mathbf{v}$; для плотности же потока энергии находим, опустив член $\rho c^2\mathbf{v}$, выражение $\mathbf{v}(\rho\varepsilon + p + \rho v^2/2)$, совпадающее с найденным в § 6.

§ 134. Релятивистские гидродинамические уравнения

Уравнения движения содержатся, как известно, в уравнениях

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \qquad (134,1)$$

выражающих собой законы сохранения энергии и импульса той физической системы, к которой относится тензор T^{ik}. Воспользовавшись выражением (133,2) для T^{ik}, мы получим отсюда уравнения движения жидкости; при этом, однако, необходимо дополнительно учесть сохранение числа частиц, не содержащееся в уравнениях (134,1). Подчеркнем, что тензор энергии-импульса (133,2) не учитывает никаких диссипативных процессов (в том числе вязкости и теплопроводности); поэтому речь идет об уравнениях движения идеальной жидкости.

Для формулирования уравнения, выражающего сохранение числа частиц в жидкости (уравнения непрерывности), введем 4-вектор тока частиц n^i. Его временная компонента есть плотность числа частиц, а пространственные компоненты составляют трехмерный вектор тока частиц. Очевидно, что 4-вектор n^i должен быть пропорционален 4-скорости u^i, т. е. иметь вид

$$n^i = nu^i, \qquad (134,2)$$