Имея все это в виду, найдем, что предельное значение

$$T_{00} = \rho c^2 + \rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2},$$

т. е. совпадает, за вычетом ρc^2, с нерелятивистской плотностью энергии. Соответствующее предельное значение тензора $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + p\delta_{\alpha\beta},$$

т. е. совпадает, как и следовало, с обычным выражением для плотности потока импульса, который мы обозначали в § 7 посредством $\Pi_{\alpha\beta}$.

Простая связь между плотностью импульса и плотностью потока энергии (отличие в множителе c^2) теряется в нерелятивистском пределе благодаря тому, что в нерелятивистскую энергию не включается энергия покоя. Действительно, компоненты $T^{0\alpha}/c$ образуют трехмерный вектор, приближенно равный

$$\rho\mathbf{v} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\left(\rho\varepsilon + p + \frac{\rho v^2}{2}\right).$$

Отсюда видно, что предельное значение плотности импульса есть, как и следовало, просто $\rho\mathbf{v}$; для плотности же потока энергии находим, опустив член $\rho c^2\mathbf{v}$, выражение $\mathbf{v}(\rho\varepsilon + p + \rho v^2/2)$, совпадающее с найденным в § 6.

§ 134. Релятивистские гидродинамические уравнения

Уравнения движения содержатся, как известно, в уравнениях

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \tag{134,1}$$

выражающих собой законы сохранения энергии и импульса той физической системы, к которой относится тензор T^{ik}. Воспользовавшись выражением (133,2) для T^{ik}, мы получим отсюда уравнения движения жидкости; при этом, однако, необходимо дополнительно учесть сохранение числа частиц, не содержащееся в уравнениях (134,1). Подчеркнем, что тензор энергии-импульса (133,2) не учитывает никаких диссипативных процессов (в том числе вязкости и теплопроводности); поэтому речь идет об уравнениях движения идеальной жидкости.

Для формулирования уравнения, выражающего сохранение числа частиц в жидкости (уравнения непрерывности), введем 4-вектор тока частиц n^i. Его временная компонента есть плотность числа частиц, а пространственные компоненты составляют трехмерный вектор тока частиц. Очевидно, что 4-вектор n^i должен быть пропорционален 4-скорости u^i, т. е. иметь вид

$$n^i = nu^i, \tag{134,2}$$

где n — скаляр; из его определения ясно, что n — собственная плотность числа частиц[1]. Уравнение непрерывности выражается просто равенством нулю 4-дивергенции вектора тока:

$$\frac{\partial (nu^i)}{\partial x^i} = 0. \qquad (134{,}3)$$

Возвратимся к уравнениям (134,1). Дифференцируя выражение (133,2), получим

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial (wu^k)}{\partial x^k} + wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0. \qquad (134{,}4)$$

Умножим это уравнение на u^i, т. е. спроецируем его на направление 4-скорости. Помня, что $u_i u^i = 1$, а потому $u_i \partial u^i/\partial x^k = 0$, находим

$$\frac{\partial (wu^k)}{\partial x^k} - u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0. \qquad (134{,}5)$$

Заменив тождественно $wu^k = nu^k (w/n)$ и воспользовавшись уравнением непрерывности (134,3), переписываем это уравнение в виде

$$nu^k \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{w}{n} - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^k} \right] = 0.$$

Согласно известному термодинамическому соотношению для тепловой функции имеем

$$d \frac{w}{n} = T d \frac{\sigma}{n} + \frac{1}{n} dp \qquad (134{,}6)$$

(T — температура, σ — энтропия, отнесенная к единице собственного объема)[2]. Отсюда видно, что выражение в квадратных

[1]) При очень высоких температурах в веществе может происходить возникновение новых частиц, так что полное число частиц каждого рода меняется. В таких случаях под n надо понимать сохраняющуюся макроскопическую величину, характеризующую число частиц. Так, если речь идет об образовании электронных пар, под n можно понимать число электронов, которое осталось бы после аннигиляции всех пар. Удобным определением n может служить плотность числа барионов (число антибарионов — если они имеются — считается при этом отрицательным). К области применений ультрарелятивистской гидродинамики могут относиться, однако, и задачи, в которых вообще нельзя ввести какой-либо сохраняющейся макроскопической характеристики числа частиц в системе, и последнее само определяется условиями термодинамического равновесия (таковы задачи, связанные с множественным образованием частиц при столкновениях быстрых нуклонов); вывод гидродинамических уравнений для таких случаев — см. задачу 2.

[2]) Напомним, что такое соотношение должно писаться для определенного количества вещества (а не для определенного объема, в котором может находиться переменное число частиц). В (134,6) оно написано для тепловой функции, отнесенной к одной частице, а $1/n$ есть объем, приходящийся на одну частицу.

скобках есть производная $T\partial(\sigma/n)/\partial x^k$. Опустив множитель nT, приходим, таким образом, к уравнению

$$u^k \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\sigma}{n} \equiv \frac{d}{ds}\frac{\sigma}{n} = 0, \qquad (134,7)$$

выражающему адиабатичность движения жидкости (d/ds означает дифференцирование вдоль мировой линии движения данного элемента жидкости). С помощью уравнения непрерывности (134,3) его можно представить в эквивалентном виде

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\sigma u^i = 0, \qquad (134,8)$$

т. е. как равенство нулю 4-дивергенции потока энтропии σu^i.

Спроецируем теперь уравнение (134,1) на направление, нормальное к u^i. Другими словами, составим их комбинацию[1])

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} - u_i u^k \frac{\partial T_k^l}{\partial x^l} = 0$$

(выражение в левой стороне тождественно обращается в ноль при скалярном умножении на u^i). Простое вычисление приводит к уравнению

$$w u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}. \qquad (134,9)$$

Три пространственные компоненты этого уравнения представляют собой релятивистское обобщение уравнения Эйлера (временна́я же компонента есть следствие первых трех).

Уравнение (134,9) может быть представлено в другом виде в случае изэнтропического движения (подобно преобразованию от (2,3) к (2,9) для нерелятивистского уравнения Эйлера). При $\sigma/n = \mathrm{const}$ имеем, согласно (134,6),

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} = n\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{w}{n}$$

и уравнение (134,9) принимает вид

$$u^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}u_i\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{w}{n}. \qquad (134,10)$$

Если движение к тому же еще и стационарно (все величины не зависят от времени), то пространственные компоненты

[1]) Для удобства напомним, что компоненты 4-скорости (см. II § 4):

$$u^i = (\gamma, \gamma\mathbf{v}/c), \quad u_i = (\gamma, -\gamma\mathbf{v}/c),$$

где для краткости введено (в этой главе!) обозначение $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

(134,10) дают

$$\gamma(\mathbf{v}\nabla)\left(\frac{\gamma w}{n}\mathbf{v}\right)+c^2\nabla\frac{w}{n}=0.$$

Умножив это уравнение скалярно на $\mathbf{v}$, после простых преобразований получим $(\mathbf{v}\nabla)(\gamma w/n)=0$. Отсюда следует, что вдоль каждой из линий тока постоянна величина

$$\gamma w/n=\mathrm{const}. \qquad (134,11)$$

Это — релятивистское обобщение уравнения Бернулли[1]).

Не предполагая изэнтропическое течение стационарным, легко видеть, что уравнения (134,10) имеют решения вида

$$\frac{w}{n}u_i=-\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \qquad (134,12)$$

где φ — функция координат и времени; эти решения — релятивистский аналог потенциальных течений нерелятивистской гидродинамики (*И. М. Халатников*, 1954). Для проверки сказанного замечаем, что в виду симметрии производных $\partial^2\varphi/\partial x^i\partial x^k$ по индексам i и k, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}u_i\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{w}{n}u_k\right);$$

умножив это равенство скалярно на u^k и раскрыв производную в правой стороне, действительно вернемся к уравнению (134,10). Пространственные и временная компоненты равенства (134,12) дают:

$$\gamma\frac{w}{nc}\mathbf{v}=\nabla\varphi, \qquad c\gamma\frac{w}{n}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0.$$

Первое из них в нерелятивистском пределе дает обычное условие потенциальности, а второе — уравнение (9,3) (с соответствующим переобозначением $\varphi/cm\to\varphi$).

Рассмотрим распространение звука в среде с релятивистским уравнением состояния (т. е. в котором давление сравнимо с плотностью внутренней энергии, включающей в себя энергию покоя). Гидродинамические уравнения звуковых волн могут быть линеаризованы; при этом удобнее исходить непосредственно из записи уравнений движения в исходном виде (134,1), а не из эквивалентных им уравнений (134,8—9). Подставив выражения (133,3) компонент тензора энергии-импульса и сохранив везде лишь величины первого порядка малости по амплитуде волны, получим систему уравнений

$$\frac{\partial e'}{\partial t}=-w\operatorname{div}\mathbf{v}, \qquad \frac{w}{c^2}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla p', \qquad (134,13)$$

---

[1]) При $v\ll c$ имеем $w/n=mc^2+mw_{\text{нер}}$ (где $w_{\text{нер}}$ — нерелятивистская тепловая функция единицы массы, обозначавшаяся в § 5 как w) и (134,11) переходит в уравнение (5,3).

где штрихом отмечены переменные части величин в волне. Исключив отсюда v, найдем:

$$\frac{\partial^2 e'}{\partial t^2} = c^2 \Delta p'.$$

Наконец, написав $e' = (\partial e/\partial p)_{\text{ад}} p'$, получим для p' волновое уравнение со скоростью звука [1])

$$u = c\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)^{1/2}_{\text{ад}} \tag{134,14}$$

(индекс «ад» указывает, что производная должна быть взята для адиабатического процесса, т. е. при постоянном σ/n). Эта формула отличается от соответствующего нерелятивистского выражения тем, что вместо обычной плотности массы здесь стоит e/c^2. Для ультрарелятивистского уравнения состояния $p = e/3$ скорость звука $u = c/\sqrt{3}$.

Наконец, скажем несколько слов о гидродинамических уравнениях при наличии существенных гравитационных полей, т. е. в общей теории относительности. Они получаются из уравнений (134,8—9) просто путем замены обычных производных ковариантными [2])

$$w u^k u_{i;\,k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}, \qquad (\sigma u^i)_{;\,i} = 0. \tag{134,15}$$

Выведем из этих уравнений условие механического равновесия в гравитационном поле. При равновесии гравитационное поле статично; можно выбрать такую систему отсчета, в которой вещество неподвижно ($u^\alpha = 0$, $u^0 = g_{00}^{-1/2}$), все величины не зависят от времени, а смешанные компоненты метрического тензора равны нулю ($g_{0\alpha} = 0$). Пространственные компоненты уравнения (134,15) дают тогда

$$w\Gamma^0_{\alpha 0} u^0 u_0 = \frac{1}{2}\frac{w}{g_{00}}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial p}{\partial x^\alpha},$$

или

$$\frac{1}{w}\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln g_{00}. \tag{134,16}$$

Это и есть искомое уравнение равновесия. В нерелятивистском предельном случае $w = \rho c^2$, $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ (φ — ньютонов-

[1]) Которая в этой главе будет обозначаться посредством u.

[2]) В общем случае эти уравнения довольно сложны. Их подробная запись в раскрытом виде (выраженном с помощью трехмерного тензора пространственной метрики — $\gamma_{\alpha\beta}$ из II § 84) дана в статье *Nelson R. A.* — Gen. Rel. Grav., 1981, v. 13, p. 569. Гидродинамические уравнения в первом посленьютоновском приближении даны в статье *Chandrasekhar S.* — Astroph. J., 1965, v. 142, p. 1488; они приведены также в книге: *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. — М.: Мир, 1977, § 39, 11 [*Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.* Gravitation. — Freeman, 1973].

ский гравитационный потенциал), и уравнение (134,16) переходит в

$$\nabla p = -\rho \nabla \varphi,$$

т. е. в обычное гидростатическое уравнение.

Задачи

1. Найти решение гидродинамических уравнений, описывающее одномерную нестационарную простую волну.

Решение. В простой волне все величины могут быть выражены в виде функции любой одной из них (см. § 101). Написав уравнения движения в виде

$$\frac{\partial T_{00}}{c\,\partial t} - \frac{\partial T_{01}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_{01}}{c\,\partial t} - \frac{\partial T_{11}}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

и считая T_{00}, T_{01}, T_{11} функциями друг от друга, получим соотношение $dT_{00}\,dT_{11} = (dT_{01})^2$. В него надо подставить

$$T_{00} = eu_0^2 + pu_1^2, \quad T_{01} = wu_0u_1, \quad T_{11} = eu_1^2 + pu_0^2,$$

учитывая при этом, что $u_0^2 - u_1^2 = 1$ (при вычислении удобно ввести параметр η согласно $u_0 = \operatorname{ch}\eta$, $u_1 = -\operatorname{sh}\eta$). В результате вычисления получается:

$$\operatorname{Arth}\frac{v}{c} = \pm\frac{1}{c}\int \frac{u}{w}\,de \tag{2}$$

(u — скорость звука). Далее, из (1) находим:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = c\,\frac{dT_{01}}{dT_{00}}$$

и, вычисляя эту производную, получим:

$$x = t\,\frac{v \pm u}{1 \pm uv/c^2} + f(v). \tag{3}$$

Формулы (2), (3) и определяют искомое решение.

2. Написать гидродинамические уравнения для ультрарелятивистской среды с неопределенным числом частиц (которое само определяется условиями термодинамического равновесия).

Решение. Условие термодинамического равновесия, определяющее числа частиц в такой среде состоит в равенстве нулю всех химических потенциалов. Тогда $e - T\sigma + p = 0$, т. е. $w = T\sigma$, а согласно термодинамическому выражению дифференциала тепловой функции (при заданном — единичном — объеме и нулевых химических потенциалах) $dw = Td\sigma + dp$; комбинируя обе формулы, получим: $dp = \sigma dT$ [1]). Уравнение (134,5) (в котором еще не использовалось уравнение непрерывности) приводит к уравнению адиабатичности в форме (134,8). Уравнение же (134,9) принимает вид

$$u^k\,\frac{\partial T u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial T}{\partial x^i}.$$

---

[1]) При ультрарелятивистском уравнении состояния $p = e/3$ из написанных формул легко найти, что $e \propto T^4$, $\sigma \propto T^3$, т. е. те же законы, которые справедливы для черного излучения (см. V § 63), — как и следовало ожидать.