§ 135. Ударные волны в релятивистской гидродинамике

Теория ударных волн в релятивистской гидродинамике строится аналогично нерелятивистской теории (*A. H. Taub*, 1948).

Как и в § 85, рассматриваем поверхность разрыва в системе координат, в которой она покоится, а газ движется перпендикулярно ей (вдоль оси $x^1 \equiv x$) со стороны *1* на сторону *2*. Условия непрерывности плотностей потока частиц, потока импульса и потока энергии гласят:

$$[n^x] = [nu^x] = 0, \quad [T^{xx}] = [w(u^x)^2 + p] = 0,$$
$$c[T^{0x}] = c[wu^0u^x] = 0,$$

или, после подстановки значений компонент 4-скорости:

$$v_1\gamma_1/V_1 = v_2\gamma_2/V_2 \equiv j, \tag{135,1}$$

$$\frac{1}{c^2}w_1v_1^2\gamma_1^2 + p_1 = \frac{1}{c^2}w_2v_2^2\gamma_2^2 + p_2, \tag{135,2}$$

$$w_1v_1\gamma_1^2 = w_2v_2\gamma_2^2 \tag{135,3}$$

где $\gamma_1 = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2}$, $\gamma_2 = (1 - v_2^2/c^2)^{-1/2}$, а $V_1 = 1/n_1$ и $V_2 = 1/n_2$ — объемы, отнесенные к одной частице[1]).

Из (135,1) и (135,2) находим

$$j^2 = (p_2 - p_1)c^2/(w_1V_1^2 - w_2V_2^2). \tag{135,4}$$

Далее, переписываем условие (135,3) с учетом (135,1) в виде

$$w_1^2V_1^2\gamma_1^2 = w_2^2V_2^2\gamma_2^2.$$

Путем простых алгебраических преобразований (из (135,1) выражаем γ_1^2 и γ_2^2 через j^2, а затем подставляем j^2 из (135,4)), получим следующее релятивистское уравнение ударной адиабаты (*адиабата Тауба*):

$$w_1^2V_1^2 - w_2^2V_2^2 + (p_2 - p_1)(w_1V_1^2 + w_2V_2^2) = 0. \tag{135,5}$$

Приведем также выражения для скоростей газа по обе стороны поверхности разрыва, которые можно получить путем элементарных преобразований из условий (135,2—3)[2]):

$$\frac{v_1}{c} = \left[\frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(e_1 + p_2)}\right]^{1/2}, \quad \frac{v_2}{c} = \left[\frac{(p_2 - p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 - e_1)(e_2 + p_1)}\right]^{1/2}. \tag{135,6}$$

[1]) В нерелятивистском пределе определенный согласно (135,1) поток числа частиц отличается множителем $1/m$ от плотности потока массы, обозначавшейся через j в § 85. Множителем m отличаются также определенные здесь и в § 85 объемы V.

[2]) При преобразованиях удобно сделать подстановку $v/c = \operatorname{th}\varphi$, $\gamma = \operatorname{ch}\varphi$.

Относительная же скорость газов по обе стороны разрыва согласно релятивистскому правилу сложения скоростей равна

$$v_{12} = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 v_2/c^2} = c\left[\frac{(p_2 - p_1)(e_2 - e_1)}{(e_1 + p_2)(e_2 + p_1)}\right]^{1/2}. \qquad (135,7)$$

В нерелятивистском пределе, если положить $e \approx mc^2 n = mc^2/V$ и пренебречь p по сравнению с e, формулы (135,4), (135,6—7) переходят в формулы (85,4), (85,6—7) (с учетом указанной в примечании разницы в определениях j и V здесь и в § 85)[1]. Для ультрарелятивистского же уравнения состояния $p = e/3$ из (135,6) имеем

$$\frac{v_1}{c} = \left[\frac{3e_2 + e_1}{3(3e_1 + e_2)}\right]^{1/2}, \qquad \frac{v_2}{c} = \left[\frac{3e_1 + e_2}{3(3e_2 + e_1)}\right]^{1/2} \qquad (135,8)$$

(отметим, что $v_1 v_2 = c^2/3$). При увеличении интенсивности ударной волны ($e_2 \to \infty$) v_1 стремится к скорости света, а v_2 — к $c/3$.

Подобно тому, как в гл. IX мы изображали ударную адиабату графиком в плоскости V, p, так естественными переменными для изображения релятивистской ударной адиабаты являются wV^2, pc^2; в этих координатах j^2 определяет наклон хорды, проведенной из начальной точки адиабаты *1* в произвольную точку *2*.

Релятивистские ударные волны слабой интенсивности могут быть рассмотрены вполне аналогично тому, как это было сделано в § 86 в нерелятивистском случае (*И. М. Халатников*, 1954). Не повторяя заново всех вычислений, приведем результат для скачка энтропии, который снова оказывается малой величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{wV^2T}\left(\frac{\partial^2 (wV^2)}{\partial p^2}\right)_{\text{ад}}\right]_1 (p_2 - p_1)^3. \qquad (135,9)$$

Поскольку должно быть $\sigma_2 > \sigma_1$, то мы видим, что ударная волна является волной сжатия, если

$$\left(\frac{\partial^2 (wV^2)}{\partial p^2}\right)_{\sigma V} > 0. \qquad (135,10)$$

Это условие представляет собой релятивистское обобщение условия (86,2) нерелятивистской гидродинамики[2]. При $p_2 > p_1$

---

[1]) Для предельного перехода от уравнения адиабаты (135,5) к нерелятивисткому уравнению (85,10) такое приближение недостаточно; надо положить $w = nmc^2 + nm\varepsilon + p$ (ε — нерелятивистская внутренняя энергия, отнесенная к единице массы) и, разделив уравнение (135,5) на c^2, перейти к пределу $c \to \infty$.

[2]) Используя термодинамическое соотношение для тепловой функции, отнесенной к одной частице, $d(wV) = V\,dp$ (при $\sigma V = \text{const}$), найдем, что условие (135,10) эквивалентно неравенству

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_{\text{ад}} > \frac{3}{w}\left|\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\text{ад}}\right|.$$

В нерелятивистском пределе правая сторона заменяется нулем.

из (135,4) и (135,5) следует, что

$$w_2V_2^2 < w_1V_1^2, \quad w_2V_2 > w_1V_1;$$

отсюда, в свою очередь, следует, что во всяком случае $V_2 < V_1$, — объем V должен уменьшиться даже сильнее, чем wV возрастает. Скорости v_1 и v_2 ударной волны слабой интенсивности в первом приближении совпадают, естественно, со скоростью звука: поскольку изменение энтропии — величина третьего порядка, то выражения (135,6) при $p_2 \to p_1$, $e_2 \to e_1$ переходят в производную (134,14)[1]. Рассуждения, вполне аналогичные произведенным в § 86, показывают, что в следующем приближении $v_1 > u_1$, $v_2 < u_2$.

Таким образом, направление изменения величин в релятивистской ударной волне слабой интенсивности подчиняется (при условии (135,10)) тем же неравенствам, что и в нерелятивистском случае. Обобщение этого результата на ударные волны произвольной интенсивности оказывается возможным произвести способом, вполне аналогичным примененному в § 87 [2]).

Подчеркнем в то же время, что неравенства $v_1 > u_1$ и $v_2 < u_2$ справедливы для релятивистских (как и для нерелятивистских) ударных волн вне зависимости от каких бы то ни было термодинамических условий — как следствие требования эволюционности. Напомним, что при выводе этих условий (§ 88) был существен только знак скоростей $u \pm v$ распространения звуковых возмущений в движущейся жидкости по отношению к неподвижной поверхности разрыва. Согласно релятивистскому правилу сложения скоростей эти скорости даются выражениями $(u \pm v)/(1 \pm vu/c^2)$, знак которых определяется только их числителями, так что все проведенные в § 88 рассуждения остаются в силе.

§ 136. Релятивистские уравнения движения вязкой и теплопроводной среды

Установление релятивистских гидродинамических уравнений при наличии диссипативных процессов (вязкости и теплопроводности) сводится к вопросу об определении вида соответствующих дополнительных членов в тензоре энергии-импульса и в векторе плотности потока вещества. Обозначая эти члены

---

[1]) Выражение же (135,4) переходит в производную $-c^2[dp/d(wV^2)]_1$. С помощью термодинамических выражений $d(eV) = -pdV$, $d(wV) = Vdp$ (при $\sigma V = \mathrm{const}$) легко убедиться, что эта производная, умноженная на V_1^2, равна, как и следовало, $u_1^2/(1-u_1^2)$.

[2]) См. *Thorne K.S.* — Astroph. J., 1973, v. 179, p. 897.