из (135,4) и (135,5) следует, что

$$w_2 V_2^2 < w_1 V_1^2, \qquad w_2 V_2 > w_1 V_1;$$

отсюда, в свою очередь, следует, что во всяком случае $V_2 < V_1$, — объем V должен уменьшиться даже сильнее, чем wV возрастает. Скорости v_1 и v_2 ударной волны слабой интенсивности в первом приближении совпадают, естественно, со скоростью звука: поскольку изменение энтропии — величина третьего порядка, то выражения (135,6) при $p_2 \to p_1$, $e_2 \to e_1$ переходят в производную (134,14)[1]. Рассуждения, вполне аналогичные произведенным в § 86, показывают, что в следующем приближении $v_1 > u_1$, $v_2 < u_2$.

Таким образом, направление изменения величин в релятивистской ударной волне слабой интенсивности подчиняется (при условии (135,10)) тем же неравенствам, что и в нерелятивистском случае. Обобщение этого результата на ударные волны произвольной интенсивности оказывается возможным произвести способом, вполне аналогичным примененному в § 87[2].

Подчеркнем в то же время, что неравенства $v_1 > u_1$ и $v_2 < u_2$ справедливы для релятивистских (как и для нерелятивистских) ударных волн вне зависимости от каких бы то ни было термодинамических условий — как следствие требования эволюционности. Напомним, что при выводе этих условий (§ 88) был существен только знак скоростей $u \pm v$ распространения звуковых возмущений в движущейся жидкости по отношению к неподвижной поверхности разрыва. Согласно релятивистскому правилу сложения скоростей эти скорости даются выражениями $(u \pm v)/(1 \pm vu/c^2)$, знак которых определяется только их числителями, так что все проведенные в § 88 рассуждения остаются в силе.

§ 136. Релятивистские уравнения движения вязкой и теплопроводной среды

Установление релятивистских гидродинамических уравнений при наличии диссипативных процессов (вязкости и теплопроводности) сводится к вопросу об определении вида соответствующих дополнительных членов в тензоре энергии-импульса и в векторе плотности потока вещества. Обозначая эти члены

---

[1] Выражение же (135,4) переходит в производную $-c^2[dp/d(wV^2)]_1$. С помощью термодинамических выражений $d(eV) = -pdV$, $d(wV) = Vdp$ (при $\sigma V = \text{const}$) легко убедиться, что эта производная, умноженная на V_1^2, равна, как и следовало, $u_1^2/(1 - u_1^2)$.

[2] См. *Thorne K.S.* — Astroph. J., 1973, v. 179, p. 897.

соответственно как τ_{ik} и ν_i, напишем:

$$T_{ik} = pg_{ik} + wu_iu_k + \tau_{ik}, \tag{136,1}$$

$$n_i = nu_i + \nu_i. \tag{136,2}$$

Уравнения движения по-прежнему содержатся в

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \qquad \frac{\partial n^i}{\partial x^i} = 0.$$

Прежде всего, однако, возникает вопрос о более точном определении самого понятия скорости u^i. В релятивистской механике всякий поток энергии неизбежно связан также и с потоком массы. Поэтому при наличии, например, теплового потока определение скорости по потоку массы (как в нерелятивистской гидродинамике) теряет непосредственный смысл. Мы определим здесь скорость условием, чтобы в собственной системе отсчета каждого данного элемента жидкости его импульс был равен нулю, а его энергия выражалась через другие термодинамические величины теми же формулами, как и при отсутствии диссипативных процессов. Это значит, что в указанной системе отсчета должны обращаться в нуль компоненты τ_{00} и $\tau_{0\alpha}$ тензора τ_{ik}; поскольку в этой системе и $u^\alpha = 0$, то имеем в ней (а потому и в любой другой системе) тензорное соотношение

$$\tau_{ik}u^k = 0. \tag{136,3}$$

Аналогичное соотношение

$$\nu_i u^i = 0 \tag{136,4}$$

должно выполняться и для вектора ν_i, поскольку в собственной системе отсчета компонента n^0 4-вектора потока частиц n^i должна, по определению, совпадать с плотностью числа частиц n.

Искомый вид тензора τ_{ik} и вектора ν_i можно установить, исходя из требований, налагаемых законом возрастания энтропии. Этот закон должен содержаться в уравнениях движения (подобно тому как в § 134 из этих уравнений получалось для идеальной жидкости условие постоянства энтропии). Путем простых преобразований с использованием уравнения непрерывности легко получить следующее уравнение:

$$u^i \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = T \frac{\partial}{\partial x^i}(\sigma u^i) - \mu \frac{\partial \nu^i}{\partial x^i} + u^i \frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0,$$

где μ — релятивистский химический потенциал вещества: $n\mu = w - T\sigma$, и использовано термодинамическое соотношение для его дифференциала:

$$d\mu = \frac{1}{n}\,dp - \frac{\sigma}{n}\,dT. \tag{136,5}$$

Наконец, используя (136,3), перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sigma u^i - \frac{\mu}{T}\nu^i\right) = -\nu^i \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\mu}{T} + \frac{\tau_i^k}{T}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}. \qquad (136,6)$$

Стоящее слева выражение должно представлять собой 4-дивергенцию потока энтропии, а выражение справа — возрастание энтропии вследствие диссипативных процессов. Таким образом, 4-вектор плотности потока энтропии есть

$$\sigma^i = \sigma u^i - \frac{\mu}{T}\nu^i, \qquad (136,7)$$

а τ_{ik} и ν^i должны выражаться линейно через градиенты скорости и термодинамических величин так, чтобы обеспечить существенную положительность правой стороны уравнения (136,6). Это условие вместе с условиями (136,3—4) однозначно определяет вид симметричного 4-тензора τ_{ik} и 4-вектора ν_i:

$$\tau_{ik} = -c\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - u_k u^l \frac{\partial u_i}{\partial x^l} - u_i u^l \frac{\partial u_k}{\partial x^l}\right) - \\ - c\left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial u^l}{\partial x^l}(g_{ik} - u_i u_k), \qquad (136,8)$$

$$\nu_i = \frac{\varkappa}{c}\left(\frac{nT}{w}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\mu}{T} - u_i u^k \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\mu}{T}\right]. \qquad (136,9)$$

Здесь η, ζ — два коэффициента вязкости, а $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, выбранные в соответствии с их нерелятивистским определением. В нерелятивистском пределе компоненты $\tau_{\alpha\beta}$ сводятся к компонентам трехмерного тензора вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$ (15,3).

Чистой теплопроводности соответствует поток энергии при отсутствии потока вещества. Условие последнего есть $nu^\alpha + \nu^\alpha = 0$. При этом пространственные компоненты 4-скорости $u^\alpha = -\nu^\alpha/n$ — величины первого порядка по градиентам; поскольку выражения (136,8—9) написаны лишь с точностью до величин этого порядка, компоненту u^0 4-скорости надо положить равной единице: $u_0^2 = 1 + u_\alpha u^\alpha = 1 + \nu_\alpha \nu^\alpha/n^2 \approx 1$. С этой же точностью надо опустить второй член в квадратных скобках в (136,9). Тогда для плотности потока энергии $cT^{0\alpha} = -cT^0_\alpha$ находим:

$$-cT^0_\alpha = -cwu_\alpha u^0 = \frac{cw}{n}\nu_\alpha = \frac{\varkappa n T^2}{w^2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\mu}{T}.$$

Используя термодинамическое соотношение (136,5), переписанное в виде

$$d\frac{\mu}{T} = -\frac{w}{nT^2}\,dT + \frac{dp}{nT},$$

получим поток энергии:

$$-\varkappa\left(\nabla T - \frac{T}{w}\nabla p\right). \tag{136,10}$$

Мы видим, что в релятивистском случае теплопроводностный поток тепла пропорционален не просто градиенту температуры, а определенной комбинации градиентов температуры и давления (в нерелятивистском пределе $w \approx nmc^2$ и член с ∇p должен быть опущен).