

где  $N$  — число атомов в 1 г гелия. Но производная  $(\partial \epsilon / \partial N)_s$  есть химический потенциал  $\mu$ . Поэтому мы получаем условие равновесия в виде

$$\mu(p_1, T_1) = \mu(p_2, T_2) \quad (138,2)$$

( $p_1, p_2$  — давления в обоих сосудах).

В дальнейшем мы будем понимать под химическим потенциалом  $\mu$  не термодинамический потенциал, отнесенный к одной частице (атому), как это обычно принято, а термодинамический потенциал, отнесенный к единице массы гелия; оба определения отличаются лишь постоянным множителем — массой атома гелия.

Если давления  $p_1, p_2$  малы, то, разлагая по их степеням и помня, что  $(\partial \mu / \partial p)_T$  есть удельный объем (слабо зависящий от температуры), получаем:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \mu(0, T_1) - \mu(0, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} s dT,$$

где  $\Delta p = p_2 - p_1$ . Если мала также и разность температур  $\Delta T = T_2 - T_1$ , то, разлагая по степеням  $\Delta T$  и замечая, что  $(\partial \mu / \partial T)_p = -s$ , получим следующее соотношение:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \rho s \quad (138,3)$$

(H. London, 1939). Поскольку  $s > 0$ , то и  $\Delta p / \Delta T > 0$ .

### § 139. Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости

Перейдем теперь к выводу полной системы гидродинамических уравнений, которые описывают движение гелия II макроскопическим (феноменологическим) образом. Согласно изложенным выше представлениям речь идет о составлении уравнений движения, описывающегося в каждой точке не одной, как в обычной гидродинамике, а двумя скоростями  $v_s$  и  $v_n$ . Оказывается, что искомая система уравнений может быть получена вполне однозначным образом, исходя из одних только требований, налагаемых принципом относительности Галилея и необходимыми законами сохранения (причем используются также свойства движения, выражаемые уравнениями (137,1) и (137,2)).

Следует иметь в виду, что фактически гелий II теряет свойство сверхтекучести при достаточно больших скоростях движения. Ввиду этого явления *критических скоростей* уравнения гидродинамики сверхтекучего гелия обладают реальным физическим

смыслом лишь для не слишком больших скоростей  $v_s$  и  $v_n$ <sup>1)</sup>. Тем не менее мы проведем сначала вывод этих уравнений, не делая никаких предположений о скоростях  $v_s$  и  $v_n$ , так как при пренебрежении высшими степенями скоростей теряется возможность последовательного вывода уравнений, исходя из законов сохранения. Переход к физически интересному случаю малых скоростей будет произведен в получающихся окончательных уравнениях.

Обозначим посредством  $\mathbf{j}$  плотность потока массы жидкости; эта величина является в то же время импульсом единицы ее объема (ср. примечание на стр. 276). Напишем  $\mathbf{j}$  в виде суммы

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \quad (139,1)$$

потоков, связанных соответственно с сверхтекучим и нормальным движениями. Коэффициенты  $\rho_s$  и  $\rho_n$  можно назвать сверхтекучей и нормальной плотностями жидкости. Их сумма равна истинной плотности  $\rho$  гелия II:

$$\rho = \rho_s + \rho_n. \quad (139,2)$$

Величины  $\rho_s$  и  $\rho_n$  являются, разумеется, функциями температуры;  $\rho_n$  обращается в нуль при абсолютном нуле, когда гелий II «целиком сверхтекуч»<sup>2)</sup>, а  $\rho_s$  обращается в нуль в  $\lambda$ -точке, когда жидкость становится «целиком нормальной».

Плотность  $\rho$  и поток  $\mathbf{j}$  должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (139,3)$$

выражающему закон сохранения массы. Закон сохранения импульса представляется уравнением вида

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (139,4)$$

где  $\Pi_{ik}$  — тензор плотности потока импульса.

<sup>1)</sup> Существование предельной скорости сверхтекучего движения следует уже из микроскопической теории — конкретная форма энергетического спектра элементарных возбуждений в гелии II приводит к нарушению условия сверхтекучести Ландау при больших скоростях (см IX § 23). Фактически наблюдающиеся критические скорости, однако, гораздо меньше этого предельного значения, причем зависят от конкретных условий течения (так, для течения по тонким капиллярам или щелям они больше, чем для движений в больших объемах). Физическая природа этих явлений состоит в возникновении квантованных вихревых колец; такого же рода вихревые нити (но прямолинейные) возникают при вращении жидкого гелия в цилиндрическом сосуде (см IX § 29). В этой главе эти явления не рассматриваются.

<sup>2)</sup> Если гелий II содержит примесь постороннего вещества (таковым фактически может являться изотоп <sup>3</sup>He), то  $\rho_n$  остается отличным от нуля и при абсолютном нуле.

Мы не будем рассматривать пока диссипативных процессов в жидкости; тогда движение обратимо и должна сохраняться также и энтропия жидкости. Имея в виду, что поток энтропии равен  $\rho s \mathbf{v}_n$ , напишем уравнение сохранения энтропии в виде

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho s \mathbf{v}_n) = 0. \quad (139,5)$$

К уравнениям (139,3)—(139,5) должно еще быть добавлено уравнение, определяющее производную по времени от скорости  $\mathbf{v}_s$ . Это уравнение должно быть составлено таким образом, чтобы обеспечить сохранение со временем потенциальности движения: это значит, что производная  $\mathbf{v}_s$  должна выражаться в виде градиента некоторого скаляра. Мы напишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v_s^2}{2} + \mu \right) = 0, \quad (139,6)$$

где  $\mu$  — некоторый скаляр.

Уравнения (139,4) и (139,6) приобретут реальный смысл, разумеется, лишь после того, как будет установлен вид пока не определенных величин  $\Pi_{ik}$  и  $\mu$ . Для этой цели надо использовать закон сохранения энергии и соображения, основанные на принципе относительности Галилея. Именно, необходимо, чтобы гидродинамические уравнения (139,3—6) автоматически приводили к выполнению закона сохранения энергии, выражающегося уравнением вида

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0, \quad (139,7)$$

где  $E$  — энергия единицы объема жидкости и  $\mathbf{Q}$  — плотность потока энергии. Принцип же относительности Галилея дает возможность определить зависимость всех величин от одной из скоростей ( $\mathbf{v}_s$ ) при заданном значении относительной скорости  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  обоих одновременно происходящих в жидкости движений.

Введем наряду с исходной системой координат  $K$  еще и другую систему,  $K_0$ , в которой скорость сверхтекучего движения данного элемента жидкости равна нулю. Система  $K_0$  движется относительно системы  $K$  со скоростью, равной скорости  $\mathbf{v}_s$  сверхтекучего движения в исходной системе. Значения всех величин в системе  $K$  связаны с их значениями в системе  $K_0$  (которые мы отличаем индексом нуль) следующими известными из

механики формулами преобразования<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \rho \mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0, & E &= \frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{j}_0 \mathbf{v}_s + E_0, \\ \mathbf{Q} &= \left( \frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{j}_0 \mathbf{v}_s + E_0 \right) \mathbf{v}_s + \frac{v_s^2}{2} \mathbf{j}_0 + (\Pi_0 \mathbf{v}_s) + \mathbf{Q}_0, & (139,8) \\ \Pi_{ik} &= \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{sk} j_{0i} + \Pi_{0ik} \end{aligned}$$

(здесь  $(\Pi_0 \mathbf{v}_s)$  обозначает вектор с компонентами  $\Pi_{0ik} v_{sk}$ ).

В системе  $K_0$  данный элемент жидкости совершает лишь одно движение — нормальное движение со скоростью  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ . Поэтому все относящиеся к этой системе величины  $\mathbf{j}_0$ ,  $E_0$ ,  $\mathbf{Q}_0$ ,  $\Pi_{0ik}$  могут зависеть лишь от разности  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ , а не от каждой из скоростей  $\mathbf{v}_n$ ,  $\mathbf{v}_s$  в отдельности; в частности, векторы  $\mathbf{j}_0$  и  $\mathbf{Q}_0$  должны быть направлены вдоль вектора  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ . Таким образом, формулы (139,8) определяют зависимость искомых величин от  $\mathbf{v}_s$  при заданном  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ .

Энергия  $E_0$ , рассматриваемая как функция от  $\rho$ ,  $s$  и импульса  $\mathbf{j}_0$  единицы объема жидкости, удовлетворяет термодинамическому соотношению

$$dE_0 = \mu d\rho + T d(\rho s) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) d\mathbf{j}_0, \quad (139,9)$$

где  $\mu$  — химический потенциал (термодинамический потенциал единицы массы). Первые два члена соответствуют обычному термодинамическому соотношению для дифференциала энергии неподвижной жидкости при постоянном (здесь — равном единице) объеме, а последний член выражает тот факт, что производная от энергии по импульсу есть скорость движения. Импульс  $\mathbf{j}_0$  (плотность потока массы в системе  $K_0$ ) есть, очевидно, просто

$$\mathbf{j}_0 = \rho n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$$

(первая из формул (139,8) при этом совпадает с (139,1)).

Ход дальнейших вычислений состоит в следующем. В уравнение сохранения энергии (139,7) подставляем  $E$  и  $\mathbf{Q}$  из (139,8),

<sup>1)</sup> Эти формулы являются непосредственным следствием принципа относительности Галилея и потому справедливы вне зависимости от того, о какой именно конкретной системе идет речь. Их можно вывести, рассмотрев, например, обычную жидкость. Так в обычной гидродинамике тензор плотности потока импульса есть  $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \rho \delta_{ik}$ . Скорость жидкости  $\mathbf{v}$  в системе  $K$  связана со скоростью  $\mathbf{v}_0$  в системе  $K_0$  посредством  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}$  — скорость системы  $K_0$  относительно системы  $K$ . Подстановка в  $\Pi_{ik}$  дает

$$\Pi_{ik} = \rho \delta_{ik} + \rho v_{0i} v_{0k} + \rho v_{0i} u_k + \rho u_i v_{0k} + \rho u_i u_k$$

Введя  $\Pi_{0ik} = \rho \delta_{ik} + \rho v_{0i} v_{0k}$  и  $\mathbf{j}_0 = \rho \mathbf{v}_0$ , получим указанную в тексте формулу преобразования для тензора  $\Pi_{ik}$ . Остальные формулы получаются аналогичным образом.

причем производная  $dE_0/dt$  выражается через производные от  $\rho$ ,  $\rho_s$  и  $\mathbf{j}_0$  согласно (139,9). После этого все производные по времени ( $\dot{\rho}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_s$  и др.) исключаем с помощью гидродинамических уравнений (139,3—6). Довольно громоздкие вычисления приводят, после значительных сокращений, к следующему результату:

$$- \Pi_{0ik} \frac{\partial v_{st}}{\partial x_k} + \omega_l \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{lik} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}_s - \mathbf{w} \nabla \rho + \rho_n \mathbf{w} (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{v}_n + \\ + \operatorname{div} (\mathbf{w} (T\rho_s + \rho_n \mu)) + (\rho_n - \rho_s) \mathbf{w} \nabla (\varphi - \mu) = \operatorname{div} \mathbf{Q};$$

здесь фигурирующий в (139,6) скаляр временно обозначен через  $\varphi$  (вместо  $\mu$ ), и для сокращения записи обозначено  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ ; кроме того, введено обозначение

$$\rho = -E_0 + T\rho_s + \mu\rho + \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \quad (139,10)$$

смысл которого выяснится ниже. Это уравнение сохранения энергии должно удовлетворяться тождественно. При этом  $\mathbf{Q}_0$ ,  $\Pi_0$ ,  $\varphi$  должны зависеть лишь от термодинамических переменных и от скорости  $\mathbf{w}$ , но не от каких-либо градиентов этих величин (поскольку мы не рассматриваем диссипативных процессов). Эти условия определяют выбор выражений для  $\mathbf{Q}_0$ ,  $\Pi_0$ ,  $\varphi$  однозначным образом.

Прежде всего, надо положить  $\varphi = \mu$ , т. е. фигурирующий в уравнении (139,6) скаляр совпадает с химическим потенциалом жидкости, определенным согласно (139,9) (именно поэтому мы заранее обозначили его буквой  $\mu$ ). Для остальных же величин надо положить:

$$\mathbf{Q}_0 = (T\rho_s + \rho_n \mu) \mathbf{w} + \rho_n \omega^2 \mathbf{w}, \\ \Pi_{0ik} = \rho \delta_{ik} + \rho_n \omega_i \omega_k.$$

Подставив теперь эти выражения в формулы (139,8), получим следующие окончательные выражения для плотности потока энергии и тензора плотности потока импульса:

$$\mathbf{Q} = \left( \mu + \frac{v_s^2}{2} \right) \mathbf{j} + T\rho_s \mathbf{v}_n + \rho_n \mathbf{v}_n (\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s), \quad (139,11)$$

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho \delta_{ik}. \quad (139,12)$$

Выражение (139,12) имеет вид, являющийся естественным обобщением формулы  $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \rho \delta_{ik}$  обычной гидродинамики. При этом величину  $\rho$ , определенную согласно (139,10), естественно рассматривать как давление жидкости; в полностью покоящейся жидкости выражение (139,10) совпадает, разумеется, с обычным определением, так как  $\Phi = \mu\rho$  становится обыч-

ным термодинамическим потенциалом единицы объема жидкости<sup>1)</sup>.

Уравнения (139,3—6) с определениями  $j$  и  $\Pi_{ik}$  согласно (139,1), (139,12) представляют собой искомую полную систему гидродинамических уравнений. Эта система очень сложна прежде всего тем, что входящие в уравнения величины  $\rho_s$ ,  $\rho_n$ ,  $\mu$ ,  $s$  являются функциями не только термодинамических переменных  $p$  и  $T$ , но квадрата относительной скорости обоих движений  $\omega^2 = (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$ . Последний представляет собой скаляр, инвариантный относительно галилеевых преобразований системы отсчета и относительно вращения жидкости как целого; эта величина специфична для сверхтекучей жидкости, отнюдь не должна обращаться в ноль в термодинамическом равновесии, и должна фигурировать в уравнении состояния жидкости наряду с  $p$  и  $T$ .

Уравнения, однако, сильно упрощаются в физически интересном случае не слишком больших скоростей (малой величиной предполагается отношение скоростей к скорости второго звука — § 141).

Прежде всего, в этом случае можно пренебречь зависимостью  $\rho_s$  и  $\rho_n$  от  $\mathbf{w}$ ; выражение (139,1) для потока  $j$  представляет собой при этом по существу первые члены разложения этой величины по степеням  $\mathbf{v}_n$  и  $\mathbf{v}_s$ . Разложение по степеням скоростей надо произвести и для остальных термодинамических величин, входящих в уравнения.

Дифференцируя выражение (139,10) и используя (139,9), получим следующее выражение для дифференциала химического потенциала:

$$d\mu = -s dT + \frac{1}{\rho} dp - \frac{\rho_n}{\rho} \mathbf{w} d\mathbf{w}. \quad (139,13)$$

Отсюда видно, что первые два члена разложения  $\mu$  по степеням  $\mathbf{w}$  имеют вид

$$\mu(p, T, \mathbf{w}) \approx \mu(p, T) - \frac{\rho_n}{2\rho} \omega^2, \quad (139,14)$$

где в правой стороне равенства стоят обычные химический по-

<sup>1)</sup> Обычное термодинамическое определение давления как средней силы, действующей на единичную площадку, относится к неподвижной среде. В обычной гидродинамике тем не менее не возникает вопроса об определении понятия давления (если не учитываются диссипативные процессы), так как всегда можно перейти к системе координат, в которой данный элемент объема жидкости покоится. В гидродинамике же сверхтекучей жидкости надлежащим выбором системы координат можно исключить лишь одно из двух одновременно происходящих движений, и потому обычное определение давления вообще не может быть применено.

Отметим также, что выражение (139,10) соответствует и определению давления как производной  $p = -\partial(E_0V)/\partial V$  от полной энергии жидкости при заданных ее полной массе  $\rho V$ , полной энтропии  $\rho sV$  и полным импульсом  $\rho \mathbf{w}V$ .

тенциал  $\mu(p, T)$  и плотность  $\rho(p, T)$  неподвижной жидкости. Дифференцируя это выражение по температуре и давлению, найдем соответствующие разложения для энтропии и плотности:

$$\begin{aligned} s(p, T, w) &\approx s(p, T) + \frac{w^2}{2} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho}, \\ \rho(p, T, w) &\approx \rho(p, T) + \frac{\rho^2 w^2}{2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho}. \end{aligned} \quad (139,13)$$

Они должны быть подставлены в гидродинамические уравнения, которые после этого будут справедливы с точностью до членов второго порядка по скоростям включительно (учет же в  $j$  зависимости  $\rho_s$  и  $\rho_n$  от  $w^2$  привел бы к членам третьего порядка малости)<sup>1)</sup>.

Введение в гидродинамические уравнения членов, учитывающих диссипативные процессы в сверхтекучей жидкости, будет произведено в следующем параграфе. Но уже здесь сформулируем граничные условия к этим уравнениям.

Прежде всего, на всякой (неподвижной) твердой поверхности должна обращаться в нуль перпендикулярная к этой поверхности компонента потока массы  $j$ . Для выяснения граничных условий, налагаемых на  $v_n$ , надо вспомнить, что нормальное движение есть в действительности движение «газа» элементарных тепловых возбуждений в нем. При движении вдоль твердой поверхности кванты возбуждения взаимодействуют с ней, что должно быть описано макроскопически как «прилипание» нормальной части массы жидкости к стенке, подобно тому как это имеет место для обычных вязких жидкостей. Другими словами, на твердой поверхности должна обращаться в нуль тангенциальная компонента скорости  $v_n$ .

Что касается перпендикулярной к стенке компоненты  $v_n$ , то надо иметь в виду, что кванты возбуждения могут поглощаться или испускаться твердым телом — это соответствует просто теплопередаче между жидкостью и твердым телом. Поэтому пер-

<sup>1)</sup> Следует отметить, что система гидродинамических уравнений, в которой  $\rho_s$  рассматривается как заданная функция  $p$  и  $T$ , может стать непригодной вблизи  $\lambda$ -точки. Дело в том, что при приближении к этой точке (как и ко всякой точке фазового перехода второго рода) неограниченно возрастают время релаксации для установления равновесного значения параметра порядка и корреляционный радиус его флуктуаций; в сверхтекучем же «Не роль параметра порядка играет конденсатная волновая функция, квадрат модуля которой определяет  $\rho_s$  (см. IV §§ 26, 28; о релаксации в сверхтекучей жидкости — см. X § 103). Гидродинамические уравнения с заданной функцией  $\rho_s(p, T)$  применимы лишь до тех пор, пока характерные расстояния и времена движения велики по сравнению соответственно с корреляционным радиусом и временем релаксации. В противном случае полная система уравнений движения должна включать в себя также и уравнения, определяющие  $\rho_s$ . См. Гинзбург В. Л., Собянин А. А. — УФН, 1976, т. 120, с. 153; J. Low. Temp. Physics, 1982, v. 49, p. 507.

пендикулярная к стенке компонента скорости  $v_n$  не должна непременно обращаться в нуль; граничное условие требует лишь непрерывности перпендикулярной к стенке компоненты потока тепла. Температура же испытывает на границе скачок, пропорциональный тепловому потоку:  $\Delta T = Kq$ , с коэффициентом пропорциональности, зависящим от свойств как жидкости, так и твердого тела. Появление этого скачка связано с особенностями теплопередачи в гелии II. Все теплосопrotivление между твердым телом и жидкостью сконцентрировано в пристеночном слое жидкости, поскольку конвективное распространение тепла в объеме жидкости практически не связано с каким бы то ни было теплосопrotivлением; в результате весь перепад температуры, вызывающий появление теплового потока, происходит практически у самой поверхности.

Интересным свойством описанных граничных условий является то, что теплообмен между твердым телом и движущейся жидкостью приводит к появлению тангенциальных сил, действующих на поверхность тела. Если ось  $x$  направлена по нормали, а ось  $y$  — по касательной к поверхности, то действующая на единицу площади касательная сила равна компоненте  $\Pi_{xy}$  тензора потока импульса. Имея в виду, что на поверхности должно быть  $j_x = \rho_n v_{nx} + \rho_s v_{sx} = 0$ , находим для этой силы отличное от нуля выражение

$$\Pi_{xy} = \rho_s v_{sx} v_{sy} + \rho_n v_{nx} v_{ny} = \rho_n v_{nx} (v_{ny} - v_{sy}).$$

Вводя тепловой поток  $q = \rho_s T v_n$ , можно переписать эту силу в виде

$$\Pi_{xy} = \frac{\rho_n}{\rho_s T} q_x (v_{ny} - v_{sy}), \quad (139,16)$$

где  $q_x$  — непрерывный на поверхности тепловой поток из твердого тела в жидкость.

При отсутствии теплопередачи между твердой стенкой и жидкостью граничное значение перпендикулярной к стенке компоненты  $v_n$  тоже обращается в нуль. Граничные условия  $j_x = 0$  и  $v_n = 0$  (ось  $x$  направлена по нормали к поверхности) эквивалентны условиям  $v_{sx} = 0$  и  $v_n = 0$ . Другими словами, в этом случае мы получим обычные граничные условия идеальной жидкости для  $v_s$  и вязкой жидкости — для  $v_n$ .

Наконец, скажем несколько слов о гидродинамике смесей жидкого  $He^4$  с посторонним веществом (фактически — с изотопом  $He^3$ ). Помимо уравнений, выражающих сохранение массы, импульса, энтропии и потенциальности сверхтекучего движения, полная система гидродинамических уравнений смеси должна содержать еще уравнение, выражающее собой сохранение каждого из двух веществ по отдельности. Оно имеет вид

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \text{div } l = 0,$$



где  $c$  — массовая концентрация  $\text{He}^3$  в смеси, а  $i$  — плотность его гидродинамического потока. Однако, требования, налагаемые законами сохранения и галилеевой инвариантностью оказываются достаточными для установления вида всех уравнений лишь если известно выражение потока  $i$ . Оно дается утверждением о том, что примесь ( $\text{He}^3$ ) принимает участие только в нормальном движении, т. е.  $i = \rho c v_n^1$ .

### § 140. Диссипативные процессы в сверхтекучей жидкости

Для учета диссипативных процессов в уравнениях гидродинамики сверхтекучей жидкости надо (как и в обычной гидродинамике) ввести в них дополнительные члены, линейные по пространственным производным скоростей и температуры. Вид этих членов может быть установлен однозначным образом исходя из требований, налагаемых законом возрастания энтропии и принципом симметрии кинетических коэффициентов Онсагера (И. М. Халатников, 1952).

Как и прежде,  $\rho$  и  $j$  — масса и импульс единицы объема жидкости. Уравнение непрерывности сохраняет свой вид (139,3). В уравнения же (139,4), (139,6—7) надо ввести дополнительные члены, которые напомним в их правых частях:

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi'_{ik}}{\partial x_k}, \quad (140,1)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v_s^2}{2} + \mu \right) = -\nabla \phi', \quad (140,2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div } \mathbf{Q} = -\text{div } \mathbf{Q}'. \quad (140,3)$$

Энтропийное же уравнение не имеет теперь вида уравнения сохранения (139,5); напротив, величины  $\Pi'$ ,  $\phi'$ ,  $\mathbf{Q}'$  должны быть определены так, чтобы обеспечить возрастание энтропии. Для этого снова подставляем в уравнение сохранения энергии (140,3) производную  $\partial E_0 / \partial t$ , выраженную с помощью (139,9), после чего исключаем производные  $\rho$ ,  $j$ ,  $v_s$  с помощью (139,3), (140,1—2). При этом подразумевается, что  $\mathbf{Q}$  и  $\Pi$  даются уже известными выражениями (139,11—12); поэтому сокращаются все члены, за исключением связанных с энтропией и с диссипативными величинами  $\Pi'$ ,  $\mathbf{Q}'$ ,  $\phi'$ . В результате получим

<sup>1)</sup> Полный вывод гидродинамических уравнений для смесей — см. книгу Халатникова И. М. Теория сверхтекучести. — М.: Наука, 1971, гл. XIII. Эти уравнения становятся неприменимыми при очень низких температурах, когда возникает квантовое вырождение элементарных возбуждений, связанных с атомами примеси.