где c — массовая концентрация He^3 в смеси, а $\mathbf{i}$ — плотность его гидродинамического потока. Однако, требования, налагаемые законами сохранения и галилеевой инвариантностью оказываются достаточными для установления вида всех уравнений лишь если известно выражение потока $\mathbf{i}$. Оно дается утверждением о том, что примесь (He^3) принимает участие только в нормальном движении, т. е. $\mathbf{i} = \rho c \mathbf{v}_n$ [1]).

§ 140. Диссипативные процессы в сверхтекучей жидкости

Для учета диссипативных процессов в уравнениях гидродинамики сверхтекучей жидкости надо (как и в обычной гидродинамике) ввести в них дополнительные члены, линейные по пространственным производным скоростей и температуры. Вид этих членов может быть установлен однозначным образом исходя из требований, налагаемых законом возрастания энтропии и принципом симметрии кинетических коэффициентов Онсагера (*И. М. Халатников*, 1952).

Как и прежде, ρ и $\mathbf{j}$ — масса и импульс единицы объема жидкости. Уравнение непрерывности сохраняет свой вид (139,3). В уравнения же (139,4), (139,6—7) надо ввести дополнительные члены, которые напишем в их правых частях:

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi'_{ik}}{\partial x_k}, \qquad (140,1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v_s^2}{2} + \mu\right) = -\nabla\varphi', \qquad (140,2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{Q} = -\operatorname{div}\mathbf{Q}'. \qquad (140,3)$$

Энтропийное же уравнение не имеет теперь вида уравнения сохранения (139,5); напротив, величины Π', φ', $\mathbf{Q}'$ должны быть определены так, чтобы обеспечить возрастание энтропии. Для этого снова подставляем в уравнение сохранения энергии (140,3) производную $\partial E_0/\partial t$, выраженную с помощью (139,9), после чего исключаем производные $\dot\rho$, $\dot{\mathbf{j}}$, $\dot{\mathbf{v}}_s$ с помощью (139,3), (140,1—2). При этом подразумевается, что $\mathbf{Q}$ и Π даются уже известными выражениями (139,11—12); поэтому сокращаются все члены, за исключением связанных с энтропией и с диссипативными величинами Π', $\mathbf{Q}'$, φ'. В результате получим

[1]) Полный вывод гидродинамических уравнений для смесей — см. книгу *Халатникова И. М.* Теория сверхтекучести. — М.: Наука, 1971, гл. XIII. Эти уравнения становятся неприменимыми при очень низких температурах, когда возникает квантовое вырождение элементарных возбуждений, связанных с атомами примеси.

уравнение

$$T\left\{\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho s\mathbf{v}_n)\right\}=$$
$$=-\operatorname{div}\{\mathbf{Q}'+\rho_s\mathbf{w}\varphi'-(\Pi'\mathbf{v}_n)\}+\varphi'\operatorname{div}(\rho_s\mathbf{w})-\Pi'_{ik}\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} \qquad (140,4)$$

(здесь снова $\mathbf{w}=\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_s$).

Линейные по градиентам выражения величин Π', Q', φ', обеспечивающие возрастание энтропии, имеют вид[1]):

$$\Pi'_{ik}=-\eta\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k}+\frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}_n\right)-$$
$$-\delta_{ik}\zeta_1\operatorname{div}(\rho_s\mathbf{w})-\delta_{ik}\zeta_2\operatorname{div}\mathbf{v}_n, \qquad (140,5)$$

$$\varphi'=\zeta_3\operatorname{div}(\rho_s\mathbf{w})+\zeta_4\operatorname{div}\mathbf{v}_n, \qquad (140,6)$$

$$\mathbf{Q}'=-\varphi'\rho_s\mathbf{w}+(\Pi'\mathbf{v}_n)-\varkappa\nabla T \qquad (140,7)$$

(в Π'_{ik} выделена комбинация производных от $\mathbf{v}_n$ с равным нулю следом — подобно тому, как это делается в обычной гидродинамике). При этом согласно принципу Онсагера должно быть

$$\zeta_1=\zeta_4, \qquad (140,8)$$

так что остается всего 5 независимых кинетических коэффициентов[2]).

Наконец, подставив выражения (140,5—7) в уравнение (140,4), после простых преобразований приведем его к виду

$$T\left\{\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\rho s\mathbf{v}_n-\frac{\varkappa}{T}\nabla T\right)\right\}=R, \qquad (140,9)$$

где

$$R=\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k}+\frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}_n\right)^2+$$
$$+2\zeta_1\operatorname{div}\mathbf{v}_n\operatorname{div}\rho_s\mathbf{w}+\zeta_2(\operatorname{div}\mathbf{v}_n)^2+\zeta_3(\operatorname{div}\rho_s\mathbf{w})^2+\frac{\varkappa}{T}(\nabla T)^2. \qquad (140,10)$$

Это уравнение — аналог общего уравнения переноса тепла обычной гидродинамики (49,5)[3]). Если правая сторона определяет скорость возрастания энтропии жидкости и должна быть суще-

---

[1]) Здесь учитывается также и условие, что вращение нормальной части жидкости как целого ($\mathbf{v}_n=[\mathbf{\Omega r}]$) не должно приводить к диссипации (ср. § 15).

[2]) Мы не будем проводить полностью соответствующих рассуждений (вполне аналогичных, например, излагавшимся в § 59). Обратим лишь внимание на то, что ζ_1 — коэффициент при $\operatorname{div}(\rho_s\mathbf{w})$ в Π', а в правую часть уравнения (140,4) этот член в Π' входит умноженным на $\operatorname{div}\mathbf{v}_n$; наоборот, ζ_4 — коэффициент при $\operatorname{div}\mathbf{v}_n$ в φ', которое входит в правую часть (140.4) умноженным на $\operatorname{div}(\rho_s\mathbf{w})$.

[3]) Все сказанное в конце § 49 об определении энтропии в термодинамически слабо неравновесном состоянии остается в силе и здесь.

ственно положительной величиной. Отсюда следует, что все коэффициенты η, ζ_1 ζ_2, ζ_3, $\varkappa$ положительны, причем сверх того $\zeta_1^2 \leqslant \zeta_2\zeta_3$. Коэффициент η «первой вязкости», связанный с нормальным движением, аналогичен вязкости обычной жидкости, а коэффициент $\varkappa$ формально аналогичен теплопроводности обычной жидкости; коэффициентов же «второй вязкости» имеется теперь три $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ вместо одного в обычной гидродинамике.

По поводу изложенных результатов необходимо, однако, сделать еще следующее замечание. Диссипируемая в жидкости энергия разумеется, инвариантна относительно галилеевого преобразования системы отсчета. Производные от скорости этому требованию конечно удовлетворяют, но в сверхтекучей жидкости галилеевски инвариантна также и разность скоростей $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Поэтому и диссипативные потоки в сверхтекучей жидкости могут зависеть не только от градиентов термодинамических величин и скоростей, но и от самой $\mathbf{w}$. Как уже было отмечено в § 139, эта разность фактически должна рассматриваться как малая величина, и в этом смысле выражения (140,5—6) содержат в себе не все в принципе возможные члены, но лишь наибольшие из них [1]).

Задача

Разделить уравнения для нормального и сверхтекучего движений в несжимаемой сверхтекучей жидкости (принимаются постоянными не только полная плотность ρ, но и ρ_s и ρ_n по отдельности).

Решение. Диссипативные члены в энтропийном уравнении являются малыми величинами второго порядка и могут быть в данном случае опущены; тогда и $s = \text{const}$, а из уравнений (139,3) и (139,5) имеем $\operatorname{div} \mathbf{v}_s = \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0$. В тензоре же плотности потока импульса сохраняем линейный по градиентам скорости член, связанный с вязкостью нормального движения:

$$\Pi'_{ik} = -\eta\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i}\right).$$

Подставив это выражение (вместе с Π_{ik} из (139,12)), получим уравнение

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_s (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s + \rho_n (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n = -\nabla p + \eta \operatorname{div} \mathbf{v}_n,$$

---

[1]) Если отказаться от этого условия, разнообразие допустимых членов в диссипативных потоках существенно возрастет (не говоря уже о том, что и самые кинетические коэффициенты будут, вообще говоря, функциями от w); например, в φ' появятся члены вида $\mathbf{w}\nabla T$ и $w_i w_k \partial v_{ni}/\partial x_k$. Полное число независимых кинетических коэффициентов, описывающих диссипацию в гелии II, оказывается при этом равным 13 (*A. Clark*, 1963). См. об этом в книге *С. Путтермана*, Гидродинамика сверхтекучей жидкости, Приложение VI, Мир, 1978 [*S. J. Putterman*, Superfluid hydrodynamics, North Holland Publishing Co., 1974].

Отметим в этой связи, что в (140,5—6) написаны члены с $\operatorname{div} \rho_s \mathbf{w}$, поскольку именно эта комбинация производных возникает естественным образом в точном уравнении (140,5—6). С принятой точностью было бы правильнее писать в (140,5—6) $\rho_s \operatorname{div} \mathbf{w}$.

или

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n + \rho_s \nabla \frac{v_s^2}{2} + \rho_s \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nabla p + \eta \operatorname{div} \mathbf{v}_n,$$

где введен потенциал сверхтекучего движения согласно $\mathbf{v}_s = \nabla \varphi_s$ и учтено, что $(\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = \nabla v_s^2/2$. Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0$, то потенциал φ_s удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \varphi_s = 0$. Введем в качестве двух вспомогательных величин «давления» нормального и сверхтекучего движений p_n и p_s согласно равенству $p = p_0 + p_n + p_s$, где p_0 — давление на бесконечности, а p_s определяется обычной для идеальной жидкости формулой

$$p_s = -\rho_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} - \frac{\rho_s v_s^2}{2}.$$

Уравнение для скорости $\mathbf{v}_n$ принимает тогда вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n = -\frac{1}{\rho_n} \nabla p_n + \frac{\eta}{\rho_n} \Delta \mathbf{v}_n,$$

формально совпадающий с уравнением Навье — Стокса для жидкости с плотностью ρ_n и вязкостью η.

Таким образом, задача о движении несжимаемого гелия II сводится к двум задачам обычной гидродинамики для идеальной и для вязкой жидкостей. Сверхтекучее движение определяется уравнением Лапласа с граничным условием для нормальной производной $\partial \varphi_s / \partial n$, как в обычной задаче о потенциальном обтекании идеальной жидкостью. Нормальное движение определяется уравнением Навье — Стокса с таким же граничным условием для $\mathbf{v}_n$ (при отсутствии теплообмена между стенкой и жидкостью), как в обычной задаче об обтекании вязкой жидкостью. Распределение давления определяется затем как сумма $p_0 + p_n + p_s$.

Для определения же распределения температуры пишем в уравнении (139,6) (с μ из (139,14)) $\mathbf{v}_s = \nabla \varphi_s$ и интегрируя находим

$$\mu(p, T) + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 + \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} = \text{const}.$$

Изменения температуры и давления в несжимаемой жидкости малы, и с точностью до членов первого порядка пишем:

$$\mu - \mu_0 = -s(T - T_0) + \frac{1}{\rho}(p - p_0)$$

(T_0, p_0 — температура и давление на бесконечности). Подставляя это выражение в написанный интеграл уравнения и вводя p_n и p_s, получим:

$$T - T_0 = \frac{\rho_n}{\rho s} \left[\frac{p_n}{\rho_n} - \frac{p_s}{\rho_s} - \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2} \right].$$

§ 141. Распространение звука в сверхтекучей жидкости

Применим уравнения гидродинамики гелия II к распространению звука в этой жидкости. Как обычно, в звуковой волне скорости движения предполагаются малыми, а плотность, давление, энтропия — почти равными своим постоянным равновесным значениям. Тогда систему гидродинамических уравнений можно линеаризовать — в (139,12—14) пренебрегаем квадра-