

или

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n + \rho_s \nabla \frac{v_s^2}{2} + \rho_s \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\nabla p + \eta \operatorname{div} \mathbf{v}_n.$$

где введен потенциал сверхтекучего движения согласно  $\mathbf{v}_s = \nabla \Phi$ , и учтено, что  $(\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = \nabla v_s^2/2$ . Поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0$ , то потенциал  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \Phi_s = 0$ . Введем в качестве двух вспомогательных величин «давления» нормального и сверхтекучего движений  $p_n$  и  $p_s$  согласно равенству  $p = p_0 + p_n + p_s$ , где  $p_0$  — давление на бесконечности, а  $p_s$  определяется обычной для идеальной жидкости формулой

$$p_s = -\rho_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} - \frac{\rho_s v_s^2}{2}.$$

Уравнение для скорости  $\mathbf{v}_n$  принимает тогда вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n = -\frac{1}{\rho_n} \nabla p_n + \frac{\eta}{\rho_n} \Delta \mathbf{v}_n,$$

формально совпадающий с уравнением Навье — Стокса для жидкости с плотностью  $\rho_n$  и вязкостью  $\eta$ .

Таким образом, задача о движении несжимаемого гелия II сводится к двум задачам обычной гидродинамики для идеальной и для вязкой жидкостей. Сверхтекучее движение определяется уравнением Лапласа с граничным условием для нормальной производной  $\partial \Phi_s / \partial n$ , как в обычной задаче о потенциальном обтекании идеальной жидкостью. Нормальное движение определяется уравнением Навье — Стокса с таким же граничным условием для  $\mathbf{v}_n$  (при отсутствии теплообмена между стенкой и жидкостью), как в обычной задаче об обтекании вязкой жидкостью. Распределение давления определяется затем как сумма  $p_0 + p_n + p_s$ .

Для определения же распределения температуры пишем в уравнении (139,6) (с  $\mu$  из (139,14))  $\mathbf{v}_s = \nabla \Phi_s$  и интегрируя находим

$$\mu(p, T) + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 + \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} = \text{const.}$$

Изменения температуры и давления в несжимаемой жидкости малы, и с точностью до членов первого порядка пишем:

$$\mu - \mu_0 = -s(T - T_0) + \frac{1}{\rho} (p - p_0)$$

( $T_0, p_0$  — температура и давление на бесконечности). Подставляя это выражение в написанный интеграл уравнения и вводя  $p_n$  и  $p_s$ , получим:

$$T - T_0 = \frac{\rho_n}{\rho s} \left[ \frac{p_n}{\rho_n} - \frac{p_s}{\rho_s} - \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2} \right].$$

## § 141. Распространение звука в сверхтекучей жидкости

Применим уравнения гидродинамики гелия II к распространению звука в этой жидкости. Как обычно, в звуковой волне скорости движения предполагаются малыми, а плотность, давление, энтропия — почти равными своим постоянным равновесным значениям. Тогда систему гидродинамических уравнений можно линеаризовать — в (139,12—14) пренебрегаем квадра-

тичными по скорости членами, а в уравнении (139,5) можно вынести в члене  $\text{div}(\rho s \mathbf{v}_n)$  энтропию  $\rho s$  из-под знака  $\text{div}$  (поскольку этот член уже содержит малую величину  $\mathbf{v}_n$ ). Таким образом, система гидродинамических уравнений приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (141,1)$$

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \rho s \text{div } \mathbf{v}_n = 0, \quad (141,2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (141,3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \mu = 0. \quad (141,4)$$

Дифференцируя (141,1) по времени и подставляя (141,3), получаем:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p. \quad (141,5)$$

Согласно термодинамическому соотношению  $d\mu = -s dT + dp/\rho$  имеем:

$$\nabla p = \rho s \nabla T + \rho \nabla \mu.$$

Подставляя сюда  $\nabla p$  из (141,3) и  $\nabla \mu$  из (141,4), получим:

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \rho s \nabla T = 0.$$

Применяем к этому уравнению операцию  $\text{div}$ , а для  $\text{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)$  подставляем выражение

$$\text{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) = \frac{\rho}{\rho_s s} \frac{\partial s}{\partial t}.$$

следующее из равенства

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho s)}{\partial t} - \frac{s}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -s \text{div } \mathbf{v}_n + \frac{s}{\rho} \text{div } \mathbf{j} = \frac{s \rho_s}{\rho} \text{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n).$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \Delta T. \quad (141,6)$$

Уравнения (141,5) и (141,6) определяют распространение звука в сверхтекучей жидкости. Уже из того факта, что этих уравнений — два, видно, что существуют две скорости распространения звука.

Напишем  $s$ ,  $\rho$ ,  $\rho$ ,  $T$  в виде  $s = s_0 + s'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$  и т. д., где буквы со штрихом представляют собой малые изменения соответствующих величин в звуковой волне, а величины с индексом нуль (который мы ниже для краткости опускаем) — их

постоянные равновесные значения. Тогда можно написать:

$$\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial p} p' + \frac{\partial \rho}{\partial T} T', \quad s' = \frac{\partial s}{\partial p} p' + \frac{\partial s}{\partial T} T',$$

и уравнения (141,5) и (141,6) принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta \rho' + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial s}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \Delta T' = 0.$$

Ищем решение этих уравнений в виде плоской волны, в которой  $p'$  и  $T'$  пропорциональны множителю  $e^{-i\omega(t-x/u)}$  (скорость звука обозначаем здесь посредством  $u$ ). В качестве условия совместности обоих уравнений получаем уравнение

$$u^4 \frac{\partial(s, \rho)}{\partial(T, p)} - u^2 \left( \frac{\partial s}{\partial T} + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} = 0$$

(где  $\partial(s, \rho)/\partial(T, p)$  обозначает якобиан преобразования от  $s, \rho$  к  $T, p$ ). Путем простого преобразования с использованием термодинамических соотношений этому уравнению можно придать вид

$$u^4 - u^2 \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v} \right] + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = 0 \quad (141,7)$$

( $c_v$  — теплоемкость единицы массы). Это квадратное (по  $u^2$ ) уравнение определяет две скорости распространения звука в гелии II. При  $\rho_s = 0$  один из корней этого уравнения обращается в нуль, и мы получаем, как и должно было быть, всего одну обычную скорость звука  $u^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ .

Фактически теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$  гелия II при температурах, не слишком близких к  $\lambda$ -точке, близки друг к другу (ввиду малости коэффициента теплового расширения). Согласно известной термодинамической формуле в этих условиях близки друг к другу также и изотермическая и адиабатическая сжимаемости:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{c_v}{c_p} \approx \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s.$$

Обозначив общее значение  $c_p$  и  $c_v$  посредством  $c$ , а общее значение  $(\partial p / \partial \rho)_T$  и  $(\partial p / \partial \rho)_s$  просто как  $\partial p / \partial \rho$ , получим из уравнения (141,7) следующие выражения для скоростей звука:

$$u_1 = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{T s^2 \rho_s}{c \rho_n}}. \quad (141,8)$$

Одна из них,  $u_1$ , почти постоянна, а другая,  $u_2$ , сильно зависит от температуры, обращаясь вместе с  $\rho_s$  в нуль в  $\lambda$ -точке<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> О распространении звука в смесях жидкого  ${}^4\text{He}$  с  ${}^3\text{He}$  — см. главу XIII указанной на стр. 719 книги И. М. Халатникова.

Вблизи  $\lambda$ -точки, однако, коэффициент теплового расширения не мал и пренебрегать разницей между  $c_p$  и  $c_v$  нельзя. Чтобы получить формулу для  $u_2$  в этом случае, следует опустить второй член в квадратной скобке в (141,7) (содержащий  $\rho_s$ ) и член  $u^4$ , который в этом случае мал (так как  $u_2$  стремится к нулю). Кроме того, можно положить  $\rho_n \approx \rho$ . В результате получим:

$$u_2 = \sqrt{\frac{T s^2 \rho_s}{c_p \rho}}. \quad (141,9)$$

Для скорости же  $u_1$  получается формула (141,8), где под  $\partial p / \partial \rho$  следует понимать  $(\partial p / \partial \rho)_s$ , т. е. обычная формула для скорости звука.

По поводу формулы (141,9) следует заметить, что она применима лишь при достаточно низких частотах — тем более низких, чем ближе жидкость находится к  $\lambda$ -точке. Дело в том, что (как было уже упомянуто в примечании на стр. 717) вблизи  $\lambda$ -точки неограниченно возрастает время релаксации  $\tau$  параметра порядка; формула (141,9), не учитывающая дисперсии и поглощения звука, справедлива лишь при условии  $\omega \tau \ll 1$ . Что касается скорости  $u_1$ , то вблизи  $\lambda$ -точки появляется дополнительное затухание, связанное с релаксацией параметра порядка — в соответствии с общими утверждениями в § 81.

При самых низких температурах, когда почти все элементарные возбуждения в жидкости являются фононами, величины  $\rho_n$ ,  $c$ ,  $s$  связаны друг с другом соотношениями<sup>1)</sup>

$$c = 3s, \quad \rho_n = \frac{cT}{3u_1^2} \rho,$$

а  $\rho_s \approx \rho$ . Подставив эти выражения в формулу (141,8) для  $u_2$ , найдем:

$$u_2 = u_1 / \sqrt{3}.$$

Таким образом, при стремлении температуры к нулю скорости  $u_1$  и  $u_2$  стремятся к постоянным пределам, причем так, что их отношение стремится к  $\sqrt{3}$ .

Для лучшего выяснения физической природы обоих видов звуковых волн в гелии II рассмотрим плоскую звуковую волну (Е. М. Лифшиц, 1944). В такой волне скорости  $v_s$ ,  $v_n$  и переменные части  $T'$ ,  $p'$  температуры и давления пропорциональны друг другу. Введем коэффициенты пропорциональности согласно

$$v_n = a v_s, \quad p' = b v_s, \quad T' = c v_s. \quad (141,10)$$

<sup>1)</sup> Их легко получить из формул для термодинамических величин гелия II, приведенных в IX §§ 22, 23.

Простое вычисление с помощью уравнений (141,1—6), произведенное с должной степенью точности, дает

$$a_1 = 1 + \frac{\beta\rho}{\rho_s s} \frac{u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 - u_2^2)}, \quad b_1 = \rho u_1, \quad c_1 = \frac{\beta T u_1^3}{c(u_1^2 - u_2^2)},$$

$$a_2 = -\frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{\beta\rho}{s\rho_n} \frac{u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 - u_2^2)}, \quad b_2 = \frac{\beta\rho u_1^2 u_2^3}{s(u_1^2 - u_2^2)}, \quad c_2 = -\frac{u_2}{s};$$
(141,11)

здесь  $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial T}$  — температурный коэффициент расширения; ввиду его малости величины, содержащие  $\beta$ , малы по сравнению с соответствующими величинами, не содержащими  $\beta$ .

Мы видим, что в звуковой волне первого типа  $v_n \approx v_s$ , т. е. в такой волне в каждом элементе объема жидкость колеблется в первом приближении как целое; нормальная и сверхтекучая массы движутся вместе. Естественно, что эти волны соответствуют обычным звуковым волнам в обычных жидкостях.

В волне же второго типа имеем  $v_n \approx -\frac{\rho_s}{\rho_n} v_s$ , т. е. полная плотность потока вещества

$$j = \rho_s v_s + \rho_n v_n \approx 0.$$

Таким образом, в волне *второго звука* сверхтекучая и нормальная массы жидкости колеблются навстречу друг другу, так что в первом приближении их центр инерции в каждом элементе объема остается неподвижным и суммарный поток вещества отсутствует. Ясно, что этот вид волн специфичен для сверхтекучей жидкости.

Между обоими видами волн имеется и другое существенное отличие, видное из формул (141,11). В звуковой волне обычного звука амплитуда колебаний давления относительно велика, а амплитуда колебаний температуры мала. Напротив, в волне второго звука относительная амплитуда колебаний температуры велика по сравнению с относительной амплитудой колебаний давления. В этом смысле можно сказать, что волны второго звука представляют собой своеобразные незатухающие температурные волны<sup>1)</sup>.

В приближении, в котором тепловым расширением пренебрегается вовсе, волны второго звука представляют собой чисто температурные колебания (с  $j = 0$ ), а волны первого звука — колебания давления (с  $v_s = v_n$ ). Соответственно их уравнения движения полностью разделяются: в уравнении (141,6) пишем  $s' = cT'/T$  и получаем:

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = u_2^2 \Delta T',$$
(141,12)

<sup>1)</sup> Они не имеют, разумеется, ничего общего с затухающими «температурными волнами» в обычной теплопроводящей среде (§ 52).

а в уравнении (141,5) полагаем  $\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial p} p'$  и получаем:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = u_1^2 \Delta p'. \quad (141,13)$$

С описанными свойствами звуковых волн в гелии II тесно связан и вопрос о различных способах их возбуждения (*Е. М. Лифшиц*, 1944). Обычные механические способы возбуждения звука (колеблющимися твердыми телами) крайне невыгодны для получения второго звука в том смысле, что интенсивность излучаемого второго звука ничтожно мала по сравнению с интенсивностью одновременно излучаемого обычного звука. В гелии II возможны, однако, и другие, специфические для него способы возбуждения звука. Таково излучение твердыми поверхностями с периодически меняющейся температурой; интенсивность излучаемого второго звука оказывается здесь большей по сравнению с интенсивностью первого звука, что естественно ввиду указанного выше различия в характере колебаний температуры в этих волнах (см. задачи 1 и 2).

При распространении волны второго звука большой амплитуды его профиль постепенно деформируется в результате эффектов нелинейности, и это приводит в конце концов к возникновению разрывов — как и для обычного звука в обычной гидродинамике (ср. §§ 101,102). Рассмотрим эти явления для одномерной бегущей волны второго звука (*И. М. Халатников*, 1952).

В одномерной бегущей волне все величины ( $\rho, p, T, v_s, v_n$ ) могут быть выражены в виде функций от одного параметра, в качестве которого может быть выбрана, например, одна из самих этих величин (§ 101). Скорость  $U$  перемещения точки профиля волны равна производной  $dx/dt$ , взятой при определенном значении этого параметра. Производные по координате и времени от каждой величины связаны друг с другом соотношением  $\partial/\partial t = -U\partial/\partial x$ .

Вместо скоростей  $v_s$  и  $v_n$  будет удобнее пользоваться величинами  $v = j/\rho$  и  $w = v_n - v_s$ ; выбираем такую систему координат, в которой скорость  $v$  в данной точке профиля волны равна нулю. Гидродинамические уравнения (139,3—6) (с  $\Pi, \mu, \rho, s$  из формул (139,12—15)) приводят к следующей системе уравнений:

$$-U \frac{\partial \rho}{\partial p} p' - U \rho^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho n}{\rho} w w' + \rho v' = 0, \quad (141,14)$$

$$p' + 2 \frac{\rho s \rho n}{\rho} w w' - U \rho v' = 0, \quad (141,15)$$

$$\left[ -\rho U \frac{\partial s}{\partial T} + w \frac{\partial}{\partial T} (\rho_s s) \right] T' + s w \frac{\partial \rho_s}{\partial p} p' + \left[ \rho_s s - U w \frac{\partial \rho n}{\partial T} \right] w' = 0, \quad (141,16)$$

$$\left[ -\rho s + U w \frac{\partial \rho n}{\partial T} \right] T' + \left[ 1 + U w p \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho n}{\rho} \right] p' + \left[ \rho_n U - \frac{\rho n \rho s}{\rho} w \right] w' - \left[ U \rho + w \rho_n \right] v' = 0. \quad (141,17)$$

Здесь опущены все члены выше второго порядка малости, а также все члены, содержащие коэффициент теплового расширения; штрих означает везде дифференцирование по параметру<sup>1)</sup>.

В волне второго звука относительная амплитуда колебаний  $\rho$  и  $v$  мала по сравнению с амплитудами  $T$  и  $w$ ; поэтому можно опустить также и члены, содержащие  $\rho\rho'$ ,  $wv'$ . Для определения  $U$  достаточно рассмотреть уравнение (141,16) и разность уравнений (141,15) и (141,17). Условие совместности получающихся таким образом двух линейных уравнений для  $T'$  и  $w'$  приводит к квадратному уравнению

$$\rho_n U^2 \frac{\partial s}{\partial T} - U w \left[ \frac{4\rho_s \rho_n}{\rho} \frac{\partial s}{\partial T} - 2s \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] - \rho_s s^2 = 0,$$

откуда

$$U = u_2 + w \left( \frac{2\rho_s}{\rho} - \frac{sT}{\rho_n c} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right).$$

Здесь  $u_2$  — местное значение скорости второго звука, меняющееся от точки к точке профиля волны вместе с отклонением  $\delta T$  температуры от ее равновесного значения. Разлагая  $u_2$  по степеням  $\delta T$ , получим

$$u_2 = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T} \delta T = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T} \frac{\rho_n u_2}{\rho s} w,$$

где  $u_{20}$  — равновесное значение  $u_2$ . Окончательно получим

$$U = u_{20} + w \frac{\rho_s s T}{\rho c} \frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{u_{20}^3 c}{T}. \quad (141,18)$$

При достаточно сильном искажении профиля волны в ней возникают разрывы (ср. § 102) — в данном случае температурные разрывы. Скорость распространения разрыва равна полусумме скоростей  $U$  с обеих сторон разрыва, т. е. равна

$$c_{20} + \frac{w_1 + w_2}{2} \frac{\rho_s s T}{\rho c} \frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{u_{20}^3 c}{T}, \quad (141,19)$$

где  $w_1, w_2$  — значения  $w$  на обеих сторонах разрыва.

Коэффициент при  $w$  в выражении (141,18) может быть как положительным, так и отрицательным. В зависимости от этого точки с большими значениями  $w$  либо опережают, либо отстают от точек с меньшими значениями  $w$ , а разрыв соответственно возникает либо на переднем, либо на заднем фронте волны (в противоположность обычному звуку, где ударная волна возникает всегда на переднем фронте).

<sup>1)</sup> А не переменную часть колеблющихся величин, как это было выше в этом параграфе!

### Задачи

1. Определить отношение интенсивностей излучения первого и второго звуков плоскостью, совершающей колебания в перпендикулярном к себе направлении.

Решение. Ищем скорости  $v_s$  (направленные по нормальной к плоскости оси  $x$ ) в первой и второй излучаемых волнах соответственно в виде

$$v_{s1} = A_1 \cos \omega (t - x/u_1), \quad v_{s2} = A_2 \cos \omega (t - x/u_2).$$

На поверхности колеблющейся плоскости скорости  $v_s$  и  $v_n$  должны быть равными скорости ее колебаний (которую обозначим посредством  $v_0 \cos \omega t$ ). Это дает уравнения

$$A_1 + A_2 = v_0, \quad a_1 A_1 + a_2 A_2 = v_0$$

(коэффициенты  $a_1, a_2$  — из (141,11)). Средняя (по времени) плотность энергии в звуковой волне в гелии II равна

$$\rho_s \bar{v}_s^2 + \rho_n \bar{v}_n^2 = \frac{1}{2} A^2 (\rho_s + \rho_n a^2);$$

поток энергии (интенсивность) получается последующим умножением на соответствующую скорость звука  $u$ . Для отношения интенсивностей излучаемых волн второго и первого звуков получаем:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2 (\rho_s + \rho_n a_2^2) u_2}{A_1^2 (\rho_s + \rho_n a_1^2) u_1} \approx \frac{\beta^2 T u_2^3}{c u_1}$$

(здесь предположено, что  $u_2 \ll u_1$ , что справедливо вплоть до очень низких температур). Это отношение весьма мало.

2. То же для излучения звука от поверхности с периодически меняющейся температурой.

Решение. Достаточно написать граничное условие  $j = 0$ , которое должно иметь место на неподвижной поверхности. Оно дает

$$\rho_s (A_1 + A_2) + \rho_n (a_1 A_1 + a_2 A_2) = 0,$$

откуда

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \frac{\rho_n a_1 + \rho_s}{\rho_n a_2 + \rho_s} \approx \frac{s}{\beta u_2^2}.$$

Для отношения интенсивностей находим:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{c}{T \beta^2 u_1 u_2}.$$

Это отношение весьма велико.

3. Определить скорость звука, распространяющегося вдоль капилляра, диаметр которого мал по сравнению с глубиной вязкого проникновения  $\delta \sim (\eta/\rho_n \omega)^{1/2}$  (K. R. Atkins, 1959) <sup>1)</sup>.

Решение. В указанных условиях можно считать, что нормальное движение в капилляре полностью задерживается трением о стенки ( $v_n = 0$ ).

<sup>1)</sup> Эти волны принято называть *четвертым звуком*. Третьим звуком называют волны, распространяющиеся по пленке гелия II на твердой поверхности; существенную роль в них играют силы вандерваальсового взаимодействия жидкости в пленке с твердым телом.



Система линеаризованных уравнений (141,1—2), (141,4) принимает вид <sup>1)</sup>

$$\rho' + \rho_s \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0, \quad \mathbf{v}_s + \nabla \mu' = \dot{\mathbf{v}}_s - s \nabla T' + \frac{1}{\rho} \nabla \rho' = 0.$$

$$(s\rho)' = \rho s' + s\rho' = 0$$

(штрих означает переменную часть величин в волне). Снова пренебрегая тепловым расширением жидкости, находим из третьего уравнения

$$\rho' s / u_1^2 = -T' \rho c / T.$$

Исключив теперь  $v_s$  из первых двух уравнений, получим волновое уравнение  $\ddot{\rho}' - u^2 \Delta \rho' = 0$ , в котором скорость распространения  $u$  дается формулой

$$u^2 = \frac{\rho_s}{\rho} u_1^2 + \frac{\rho_n}{\rho} u_2^2.$$

4. Найти коэффициенты поглощения первого и второго звуков в гелии II.

Решение. Вычисление осуществляется аналогично тому, как это было сделано в § 79 для звука в обычных жидкостях; при этом вместо (79,1) используется выражение (140,10). В пренебрежении всеми членами, содержащими температурный коэффициент расширения  $\beta$  (в том числе в (141,10—11)), получим для коэффициентов поглощения:

$$\gamma_1 = \frac{\omega^2}{2\rho u_1^3} \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta_2 \right), \quad \gamma_2 = \frac{\omega^2 \rho_s}{2\rho \rho_n u_2^3} \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\rho \zeta_1 + \frac{\rho n \kappa}{\rho_s c} \right).$$

<sup>1)</sup> Уравнение же сохранения импульса (141,3) следует опустить: оно не имеет места в рассматриваемых условиях, когда к капилляру должна прилагаться внешняя сила, чтобы удерживать его покоящимся.