ГЛАВА I

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

## § 1. Тензор деформации

Механика твердых тел, рассматриваемых как сплошные среды, составляет содержание *теории упругости* [1]).

Под влиянием приложенных сил твердые тела в той или иной степени деформируются, т. е. меняют свою форму и объем. Для математического описания деформации тела поступают следующим образом. Положение каждой точки тела определяется ее радиус-вектором $\mathbf{r}$ (с компонентами $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) в некоторой системе координат. При деформировании тела все его точки, вообще говоря, смещаются. Рассмотрим какую-нибудь определенную точку тела; если ее радиус-вектор до деформирования был $\mathbf{r}$, то в деформированном теле он будет иметь некоторое другое значение $\mathbf{r}'$ (с компонентами $x_i'$). Смещение точки тела при деформировании изобразится тогда вектором $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$, который мы обозначим посредством $\mathbf{u}$:

$$u_i = x_i' - x_i. \tag{1,1}$$

Вектор $\mathbf{u}$ называют *вектором деформации* (или *вектором смещения*). Координаты $x_i'$ смещенной точки являются, конечно, функциями от координат $x_i$ той же точки до ее смещения. Поэтому и вектор деформации является функцией координат $x_i$. Задание вектора $\mathbf{u}$ как функции от $x_i$ полностью определяет деформацию тела.

При деформировании тела меняются расстояния между его точками. Рассмотрим какие-нибудь две бесконечно близкие точки. Если радиус-вектор между ними до деформирования был $dx_i$, то в деформированном теле радиус-вектор между теми же двумя точками будет $dx_i' = dx_i + du_i$. Само расстояние между точками было равно до деформирования

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

а после деформирования

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}.$$

---

[1]) Основные уравнения теории упругости были установлены *Коши* и *Пуассоном* в 20-х годах XIX века.

Согласно общему правилу написания сумм можно написать:

$$dl^2 = dx_i^2, \quad dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2.$$

Подставив $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$, переписываем $dl'^2$ в виде

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i\, dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k\, dx_l.$$

Поскольку во втором члене оба индекса $i$ и $k$ являются немыми, их можно переставить и соответственно записать этот член в явно симметричном виде

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dx_i\, dx_k.$$

В третьем же члене поменяем местами индексы $i$ и $l$. Тогда мы получим окончательно $dl'^2$ в виде

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{1,2}$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \tag{1,3}$$

Этими выражениями определяется изменение элемента длины при деформировании тела. Тензор $u_{ik}$ называют *тензором деформации*; по своему определению он симметричен:

$$u_{ik} = u_{ki}. \tag{1,4}$$

Как и всякий симметричный тензор, можно привести тензор $u_{ik}$ в каждой данной точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке можно выбрать такую систему координат — главные оси тензора, — в которой из всех компонент $u_{ik}$ отличны от нуля только диагональные компоненты $u_{11}$, $u_{22}$, $u_{33}$. Эти компоненты — главные значения тензора деформации — обозначим посредством $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$. Надо, конечно, помнить, что если тензор $u_{ik}$ приведен к главным осям в некоторой точке тела, то он, вообще говоря, недиагонален во всех других точках.

Если тензор деформации приведен в данной точке к главным осям, то в окружающем ее элементе объема элемент длины (1,2) приобретает вид

$$dl'^2 = (\delta_{ik} + 2u_{ik})\, dx_i\, dx_k =$$
$$= (1 + 2u^{(1)})\, dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)})\, dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)})\, dx_3^2.$$

Мы видим, что это выражение распадается на три независимых члена. Это значит, что в каждом элементе объема тела деформацию можно рассматривать как совокупность трех независимых деформаций по трем взаимно перпендикулярным направлениям — главным осям тензора деформации. Каждая из этих деформаций

представляет собой простое растяжение (или сжатие) вдоль соответствующего направления: длина $dx_1$ вдоль первой из главных осей превращается в длину

$$dx_1' = \sqrt{1 + 2u^{(1)}}\, dx_1$$

и аналогично для двух других осей. Величины

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$$

представляют собой, следовательно, относительные удлинения $(dx_i' - dx_i)/dx_i$ вдоль этих осей.

Практически почти во всех случаях деформирования тел деформации оказываются малыми. Это значит, что изменение любого расстояния в теле оказывается малым по сравнению с самим расстоянием. Другими словами, относительные удлинения малы по сравнению с единицей. Ниже мы будем рассматривать все деформации как малые.

Если тело подвергается малой деформации, то все компоненты тензора деформации, определяющего, как мы видели, относительные изменения длин в теле, являются малыми. Что же касается вектора деформации, то он может быть в некоторых случаях большим даже при малых деформациях. Рассмотрим, например, длинный тонкий стержень. Даже при сильном изгибе, когда его концы значительно переместятся в пространстве, растяжения и сжатия внутри самого стержня будут незначительными.

За исключением таких особых случаев [1]), при малых деформациях является малым также и вектор деформации. Действительно, никакое «трехмерное» тело (т. е. тело, размеры которого не специально малы ни в каком направлении) не может быть, очевидно, деформировано так, чтобы отдельные его части сильно переместились в пространстве, без возникновения в теле сильных растяжений и сжатий.

Тонкие стержни будут нами рассмотрены отдельно в главе II. В остальных же случаях, следовательно, при малых деформациях смещения $u_i$, а с ними и их производные по координатам, малы. Поэтому в общем выражении (1,3) можно пренебречь последним членом как малой величиной второго порядка. Таким образом, в случае малых деформаций тензор деформации определяется выражением

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \qquad (1,5)$$

---

[1]) Кроме деформаций тонких стержней сюда относятся изгибы тонких пластинок в цилиндрическую поверхность. Следует исключить также случай, когда «трехмерное» тело наряду с деформацией поворачивается как целое вокруг некоторой оси на конечный угол.

Относительные удлинения элементов длины вдоль направлений главных осей тензора деформации (в данной точке) равны теперь с точностью до величин высших порядков

$$\sqrt{1+2u^{(i)}}-1 \approx u^{(i)},$$

т. е. непосредственно главным значениям тензора $u_{ik}$.

Рассмотрим какой-нибудь бесконечно малый элемент объема $dV$ и определим его величину $dV'$ после деформирования тела. Для этого выберем в качестве осей координат главные оси тензора деформации в рассматриваемой точке. Тогда элементы длины $dx_1$, $dx_2$, $dx_3$ вдоль этих осей после деформирования перейдут в $dx_1' = (1+u^{(1)})\,dx_1$ и т. д. Объем $dV$ есть произведение $dx_1\,dx_2\,dx_3$, объем же $dV'$ равен $dx_1'\,dx_2'\,dx_3'$. Таким образом,

$$dV' = dV\,(1+u^{(1)})\,(1+u^{(2)})\,(1+u^{(3)}).$$

Пренебрегая величинами высших порядков малости, находим отсюда

$$dV' = dV\,(1+u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}).$$

Но сумма $u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}$ главных значений тензора есть, как известно, его инвариант и равна в любой системе координат сумме диагональных компонент $u_{ii} = u_{11}+u_{22}+u_{33}$.

Таким образом,

$$dV' = dV\,(1+u_{ii}). \tag{1,6}$$

Мы видим, что сумма диагональных компонент тензора деформации дает относительное изменение объема $(dV'-dV)/dV$.

Часто бывает удобным пользоваться компонентами тензора деформации не в декартовых, а в сферических или цилиндрических координатах. Приведем здесь для справок соответствующие формулы, выражающие эти компоненты через производные от компонент вектора смещения в тех же координатах. В сферических координатах $r$, $\theta$, $\varphi$ имеем

$$\begin{gathered}
u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \\
u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{u_r}{r}, \\
2u_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg}\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \\
2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\
2u_{\varphi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}.
\end{gathered} \tag{1,7}$$

В цилиндрических координатах $r$, $\varphi$, $z$

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2u_{\varphi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \tag{1,8}$$

$$2u_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.$$

## § 2. Тензор напряжений

В недеформированном теле расположение молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. При этом все его части находятся друг с другом и в механическом равновесии. Это значит, что если выделить внутри тела какой-нибудь объем, то равнодействующая всех сил, действующих на этот объем со стороны других частей, равна нулю.

При деформировании же расположение молекул меняется и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. В результате в нем возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти возникающие при деформировании внутренние силы называются *внутренними напряжениями*. Если тело не деформировано, то внутренние напряжения в нем отсутствуют.

Внутренние напряжения обусловливаются молекулярными силами, т. е. силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Весьма существенным для теории упругости является то обстоятельство, что молекулярные силы обладают очень незначительным радиусом действия. Их влияние простирается вокруг создающей их частицы лишь на расстояниях порядка межмолекулярных. Но в теории упругости, как в макроскопической теории, рассматриваются только расстояния, большие по сравнению с межмолекулярными. Поэтому «радиус действия» молекулярных сил в теории упругости должен считаться равным нулю. Можно сказать, что силы, обусловливающие внутренние напряжения, являются в теории упругости силами «близкодействующими», передающимися от каждой точки только к ближайшим с нею. Отсюда следует, что силы, оказываемые на какую-нибудь часть тела со стороны окружающих ее частей, действуют только непосредственно через поверхность этой части.

Здесь необходима следующая оговорка: сделанное утверждение несправедливо в тех случаях, когда деформирование тела сопровождается появлением в нем макроскопических электрических полей; такие (так называемые пиро- и пьезоэлектрические) тела рассматриваются в томе VIII этого курса.