В цилиндрических координатах r, φ, z

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2u_{\varphi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \tag{1,8}$$

$$2u_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.$$

§ 2. Тензор напряжений

В недеформированном теле расположение молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. При этом все его части находятся друг с другом и в механическом равновесии. Это значит, что если выделить внутри тела какой-нибудь объем, то равнодействующая всех сил, действующих на этот объем со стороны других частей, равна нулю.

При деформировании же расположение молекул меняется и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. В результате в нем возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти возникающие при деформировании внутренние силы называются *внутренними напряжениями*. Если тело не деформировано, то внутренние напряжения в нем отсутствуют.

Внутренние напряжения обусловливаются молекулярными силами, т. е. силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Весьма существенным для теории упругости является то обстоятельство, что молекулярные силы обладают очень незначительным радиусом действия. Их влияние простирается вокруг создающей их частицы лишь на расстояниях порядка межмолекулярных. Но в теории упругости, как в макроскопической теории, рассматриваются только расстояния, большие по сравнению с межмолекулярными. Поэтому «радиус действия» молекулярных сил в теории упругости должен считаться равным нулю. Можно сказать, что силы, обусловливающие внутренние напряжения, являются в теории упругости силами «близкодействующими», передающимися от каждой точки только к ближайшим с нею. Отсюда следует, что силы, оказываемые на какую-нибудь часть тела со стороны окружающих ее частей, действуют только непосредственно через поверхность этой части.

Здесь необходима следующая оговорка: сделанное утверждение несправедливо в тех случаях, когда деформирование тела сопровождается появлением в нем макроскопических электрических полей; такие (так называемые пиро- и пьезоэлектрические) тела рассматриваются в томе VIII этого курса.

Выделим в теле какой-нибудь объем и рассмотрим действующую на него суммарную силу. С одной стороны, эта суммарная сила может быть представлена в виде объемного интеграла

$$\int \mathbf{F}\, dV,$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на единицу объема тела. С другой стороны, силы, с которыми действуют друг на друга различные части самого рассматриваемого объема, не могут привести к появлению отличной от нуля суммарной равнодействующей силы, поскольку они в силу закона равенства действия и противодействия в сумме уничтожают друг друга. Поэтому искомую полную силу можно рассматривать как сумму только тех сил, которые действуют на данный объем со стороны окружающих его частей тела. Но, согласно сказанному выше, эти силы действуют на рассматриваемый объем через его поверхность, и потому результирующая сила может быть представлена в виде суммы сил, действующих на каждый элемент поверхности объема, т. е. в виде некоторого интеграла по этой поверхности.

Таким образом, для любого объема тела каждая из трех компонент $\int F_i\, dV$ равнодействующей всех внутренних напряжений может быть преобразована в интеграл по поверхности этого объема. Как известно из векторного анализа, интеграл от скаляра по произвольному объему может быть преобразован в интеграл по поверхности в том случае, если этот скаляр является дивергенцией некоторого вектора. В данном случае мы имеем дело с интегралом не от скаляра, а от вектора. Поэтому вектор F_i должен являться дивергенцией некоторого тензора второго ранга, т. е. иметь вид [1])

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{2,1}$$

Тогда сила, действующая на некоторый объем, может быть написана в виде интеграла по замкнутой поверхности, охватывающей этот объем [2]):

$$\int F_i\, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\, dV = \oint \sigma_{ik}\, df_k, \tag{2,2}$$

---

[1]) Вектор $d\mathbf{f}$ элемента площади направлен по нормали, внешней по отношению к охватываемому поверхностью объему. Интеграл по замкнутой поверхности преобразуется в интеграл по объему путем замены df_i оператором $dV \cdot \partial/\partial x_i$.

[2]) Строго говоря, при определении полной силы, действующей на деформированный объем тела, интегрирование должно производиться не по старым координатам x_i, а по координатам x_i' точек деформированного тела. Соответственно этому и производные (2,1) должны были бы браться по x_k'. Но ввиду малости деформации производные по x_k и по x_k' отличаются друг от друга на величины высших порядков малости, и потому можно все дифференцирования производить по координатам x_k.

Тензор σ_{ik} называют *тензором напряжений*. Как видно из (2,2), $\sigma_{ik}df_k$ есть i-я компонента силы, действующей на элемент поверхности $d\mathbf{f}$. Выбирая элементы поверхности в плоскостях $x, y; y, z; x, z$, находим, что компонента σ_{ik} тензора напряжений есть i-я компонента силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k. Так, на единичную площадку, перпендикулярную к оси x, действуют нормальная к ней (направленная вдоль оси x) сила σ_{xx} и тангенциальные (направленные по осям y и z) силы σ_{yx} и σ_{zx}.

Необходимо сделать здесь следующее замечание по поводу знака силы $\sigma_{ik}df_k$. В (2,2) интеграл по поверхности представляет собой силу, действующую на ограниченный этой поверхностью объем со стороны окружающих частей тела. Наоборот, сила, с которой этот объем действует сам на окружающую его поверхность, имеет обратный знак. Поэтому, например, сила, действующая со стороны внутренних напряжений на всю поверхность тела, есть

$$-\oint \sigma_{ik}\, df_k,$$

где интеграл берется по поверхности тела, а $d\mathbf{f}$ направлен по внешней нормали.

Определим момент сил, действующих на некоторый объем тела. Момент силы $\mathbf{F}$ можно, как известно, написать в виде антисимметричного тензора второго ранга с компонентами $F_i x_k - F_k x_i$, где x_i — координаты точки приложения силы [1]). Поэтому момент сил, действующих на элемент объема dV, есть $(F_i x_k - F_k x_i)\, dV$, а на весь объем действует момент сил

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\, dV.$$

Как и полная сила, действующая на любой объем, момент этих сил тоже должен выражаться в виде интеграла по поверхности объема. Подставляя для F_i выражение (2,1), находим

$$M_{ik} = \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV =$$
$$= \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l}\, dV - \int \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV.$$

Замечаем, что во втором члене производные $\partial x_k/\partial x_l$ составляют единичный тензор δ_{kl}. В первом же члене под интегралом стоит дивергенция некоторого тензора; этот интеграл преобразуется в интеграл по поверхности. В результате находим

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\, df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik})\, dV. \qquad (2,3)$$

---

[1]) Момент силы $\mathbf{F}$ определяется как векторное произведение $[\mathbf{Fr}]$. Компоненты векторного произведения двух векторов составляют антисимметричный тензор второго ранга, компоненты которого написаны в тексте.

Тензор M_{ik} будет выражен в виде интеграла только по поверхности, если тензор напряжений симметричен,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \tag{2,4}$$

так что объемный интеграл исчезает (к обоснованию важного утверждения (2,4) мы вернемся еще в конце параграфа). Момент сил, действующих на некоторый объем тела, представится тогда в простом виде:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\, dV = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\, df_l. \tag{2,5}$$

Легко написать тензор напряжений в случае равномерного *всестороннего сжатия* тела. При таком сжатии на каждую единицу поверхности тела действует одинаковое по величине давление, направленное везде по нормали к поверхности внутрь объема тела. Если обозначить это давление посредством p, то на элемент поверхности df_i действует сила $-p\, df_i$. С другой стороны, эта сила, будучи выражена через тензор напряжений, должна иметь вид $\sigma_{ik} df_k$. Написав $-p\, df_i$ в виде $-p\delta_{ik} df_k$, мы видим, что тензор напряжений при равномерном всестороннем сжатии выглядит следующим образом:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}. \tag{2,6}$$

Все отличные от нуля его компоненты равны просто давлению.

В общем случае произвольной деформации отличны от нуля также и недиагональные компоненты тензора напряжений. Это значит, что на каждый элемент поверхности внутри тела действует не только нормальная к нему сила, но также и тангенциальные, *скалывающие*, напряжения, стремящиеся сдвинуть параллельные элементы поверхности друг относительно друга.

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться в каждом элементе объеме тела, т. е. должно быть $F_i = 0$. Таким образом, уравнения равновесия деформированного тела имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{2,7}$$

Если тело находится в поле тяжести, то должна исчезать сумма $\mathbf{F} + \rho\mathbf{g}$ сил внутренних напряжений и силы тяжести $\rho\mathbf{g}$, действующей на единицу объема тела (ρ — плотность [1]), $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести, направленный вертикально вниз); уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0. \tag{2,8}$$

[1]) Строго говоря, плотность тела при его деформировании меняется. Учет этого изменения приводит, однако, в случае малых деформаций к величинам высших порядков малости и потому для нас несуществен.

Что касается внешних сил, приложенных непосредственно к поверхности тела (которые и являются обычно источником деформации), то они входят в граничные условия к уравнениям равновесия. Пусть **P** есть внешняя сила, действующая на единицу площади поверхности тела, так что на элемент поверхности df действует сила $\mathbf{P}\,df$. В равновесии она должна компенсироваться силой $-\sigma_{ik}df_k$, действующей на тот же элемент поверхности со стороны внутренних напряжений. Таким образом, должно быть

$$P_i\,df - \sigma_{ik}\,df_k = 0.$$

Написав df_k в виде $df_k = n_k df$, где **n** — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности, находим отсюда

$$\sigma_{ik}n_k = P_i. \tag{2,9}$$

Это и есть условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии тела.

Выведем здесь еще формулу, определяющую среднее значение тензора напряжений в деформированном теле. Для этого умножим уравнение (2,7) на x_k и проинтегрируем по всему объему тела:

$$\int \frac{\partial\sigma_{il}}{\partial x_l}\,x_k\,dV = \int \frac{\partial\,(\sigma_{il}x_k)}{\partial x_l}\,dV - \int \sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l}\,dV = 0.$$

Первый интеграл справа преобразуем в интеграл по поверхности тела; во втором замечаем, что $\partial x_k/\partial x_l = \delta_{kl}$. Получаем

$$\oint \sigma_{il}x_k\,df_l - \int \sigma_{ik}\,dV = 0.$$

Подставляя в первый интеграл (2,9), находим

$$\oint P_i x_k\,df = \int \sigma_{ik}\,dV = V\bar{\sigma}_{ik},$$

где V — объем тела, а $\bar{\sigma}_{ik}$ — среднее по всему объему значение тензора напряжений. Воспользовавшись тем, что $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, можно написать эту формулу в симметричном виде:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V}\oint (P_i x_k + P_k x_i)\,df. \tag{2,10}$$

Таким образом, среднее значение тензора напряжений может быть определено непосредственно по действующим на тело внешним силам без предварительного решения уравнений равновесия.

Вернемся к приведенному выше доказательству симметричности тензора напряжений; оно нуждается в уточнении. Поставленное физическое условие (представимость тензора M_{ik} в виде интеграла только по поверхности) будет выполнено, не только если антисимметричная часть тензора σ_{ik} (т. е. подынтегральное выражение в объемном интеграле в (2,3)) равна нулю, но и если она представляет собой некоторую полную дивергенцию, т. е. если

$$\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 2\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_{ikl}, \quad \varphi_{ikl} = -\varphi_{kil}, \tag{2,11}$$

где φ_{ikl} — произвольный тензор, антисимметричный по первой паре индексов. В данном случае этот последний тензор должен выражаться через производные $\partial u_i/\partial x_k$, и соответственно в тензоре напряжений возникнут члены с высшими производными от вектора смещения. В рамках излагаемой в этой книге теории упругости все такие члены должны рассматриваться как малые высшего порядка и опускаться.

С принципиальной точки зрения существенно, однако, что тензор напряжений может быть приведен к симметричному виду и без этих пренебрежений [1]). Дело в том, что определение этого тензора, согласно (2,1), неоднозначно — допустимо любое преобразование вида

$$\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l}\chi_{ikl}, \quad \chi_{ikl} = -\chi_{ilk}, \tag{2,12}$$

где χ_{ikl} — произвольный тензор, антисимметричный по последней паре индексов; очевидно, что производные $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ и $\partial\tilde{\sigma}_{ik}/\partial x_k$, определяющие силу $\mathbf{F}$, тождественно совпадают. Если антисимметричная часть тензора σ_{ik} имеет вид (2,11), то несимметричный тензор σ_{ik} может быть приведен к симметричному виду преобразованием такого вида. Симметричный тензор имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ki}) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\varphi_{ilk} + \varphi_{kli}). \tag{2,13}$$

Действительно, легко убедиться, что разность $\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik}$ имеет вид (2,12) с тензором

$$\chi_{ikl} = \varphi_{kli} + \varphi_{lik} - \varphi_{ikl} \tag{2,14}$$

(*P. C. Martin, O. Parodi, P. S. Pershan*, 1972).

§ 3. Термодинамика деформирования

Рассмотрим какое-нибудь деформированное тело и предположим, что его деформация меняется так, что вектор деформации u_i изменяется на малую величину δu_i. Определим работу, производимую при этом силами внутренних напряжений. Умножая силу $F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ на перемещение δu_i и интегрируя по всему объему тела, имеем

$$\int \delta R\, dV = \int \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\delta u_i\, dV.$$

Посредством δR мы обозначили работу сил внутренних напряжений в единице объема тела. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \delta R\, dV = \oint \sigma_{ik}\,\delta u_i\, df_k - \int \sigma_{ik}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k}\, dV.$$

---

[1]) В соответствии с общими утверждениями микроскопической теории — ср. II, § 32.