где φ_{ikl} — произвольный тензор, антисимметричный по первой паре индексов. В данном случае этот последний тензор должен выражаться через производные $\partial u_i/\partial x_k$, и соответственно в тензоре напряжений возникнут члены с высшими производными от вектора смещения. В рамках излагаемой в этой книге теории упругости все такие члены должны рассматриваться как малые высшего порядка и опускаться.

С принципиальной точки зрения существенно, однако, что тензор напряжений может быть приведен к симметричному виду и без этих пренебрежений [1]). Дело в том, что определение этого тензора, согласно (2,1), неоднозначно — допустимо любое преобразование вида

$$\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l}\chi_{ikl}, \quad \chi_{ikl} = -\chi_{ilk}, \tag{2,12}$$

где χ_{ikl} — произвольный тензор, антисимметричный по последней паре индексов; очевидно, что производные $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ и $\partial\tilde{\sigma}_{ik}/\partial x_k$, определяющие силу $\mathbf{F}$, тождественно совпадают. Если антисимметричная часть тензора σ_{ik} имеет вид (2,11), то несимметричный тензор σ_{ik} может быть приведен к симметричному виду преобразованием такого вида. Симметричный тензор имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ki}) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\varphi_{ilk} + \varphi_{kli}). \tag{2,13}$$

Действительно, легко убедиться, что разность $\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik}$ имеет вид (2,12) с тензором

$$\chi_{ikl} = \varphi_{kli} + \varphi_{lik} - \varphi_{ikl} \tag{2,14}$$

(*P. C. Martin, O. Parodi, P. S. Pershan*, 1972).

§ 3. Термодинамика деформирования

Рассмотрим какое-нибудь деформированное тело и предположим, что его деформация меняется так, что вектор деформации u_i изменяется на малую величину δu_i. Определим работу, производимую при этом силами внутренних напряжений. Умножая силу $F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ на перемещение δu_i и интегрируя по всему объему тела, имеем

$$\int \delta R\, dV = \int \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\delta u_i\, dV.$$

Посредством δR мы обозначили работу сил внутренних напряжений в единице объема тела. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \delta R\, dV = \oint \sigma_{ik}\,\delta u_i\, df_k - \int \sigma_{ik}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k}\, dV.$$

---

[1]) В соответствии с общими утверждениями микроскопической теории — ср. II, § 32.

Рассматривая неограниченную среду, не деформированную на бесконечности, устремим поверхность интегрирования в первом интеграле к бесконечности; тогда на ней $\sigma_{ik} = 0$, и интеграл исчезает. Второй же интеграл можно, воспользовавшись симметрией тензора σ_{ik}, переписать в виде

$$\int \delta R\, dV = -\frac{1}{2}\int \sigma_{ik}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i}\right) dV =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sigma_{ik}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dV = -\int \sigma_{ik}\,\delta u_{ik}\, dV.$$

Таким образом, находим

$$\delta R = -\sigma_{ik}\delta u_{ik}. \tag{3,1}$$

Эта формула определяет работу δR по изменению тензора деформации.

Если деформация тела достаточно мала, то по прекращении действия вызвавших деформацию внешних сил тело возвращается в исходное недеформированное состояние. Такие деформации называют *упругими*. При больших деформациях прекращение действия внешних сил не приводит к полному исчезновению деформации, — остается, как говорят, некоторая остаточная деформация, так что состояние тела отличается от того, в каком оно находилось до приложения к нему сил. Такие деформации называют *пластическими*. В дальнейшем везде (за исключением гл. IV) мы будем рассматривать только упругие деформации.

Предположим далее, что процесс деформирования совершается настолько медленно, что в каждый момент времени в теле успевает установиться состояние термодинамического равновесия, соответствующее тем внешним условиям, в которых тело в данный момент находится (фактически это условие почти всегда выполняется). Тогда процесс будет термодинамически обратимым.

Условимся относить в дальнейшем все такие термодинамические величины, как энтропия S, внутренняя энергия $\mathscr{E}$ и т. п., к единице объема тела (а не к единице массы, как это принято в гидродинамике) и обозначать их соответствующими большими буквами.

В этой связи необходимо сделать следующее замечание. Строго говоря, надо различать единицы объема до и после деформирования; эти объемы содержат, вообще говоря, различные количества вещества. Все термодинамические величины мы будем в дальнейшем везде, кроме гл. VI относить к единице объема недеформированного тела, т. е. к заключенному в нем количеству вещества, которое после деформирования может занять объем, несколько отличный от первоначального объема. Соответственно этому, например, полная энергия тела получается всегда интегрированием $\mathscr{E}$ по объему недеформированного тела.

Бесконечно малое изменение $d\mathscr{E}$ внутренней энергии равно разности полученного данной единицей объема тела количества тепла и произведенной силами внутренних напряжений работы dR. Количество тепла равно при обратимом процессе $T\,dS$, где T — температура. Таким образом, $d\mathscr{E} = T\,dS - dR$; взяв dR из (3,1), получим

$$d\mathscr{E} = T\,dS + \sigma_{ik}du_{ik}. \tag{3,2}$$

Это — основное термодинамическое соотношение для деформируемых тел.

При равномерном всестороннем сжатии тензор напряжений равен $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ (2,6). В этом случае

$$\sigma_{ik}\,du_{ik} = -p\delta_{ik}\,du_{ik} = -p\,du_{ii}.$$

Но мы видели (см. (1,6)), что сумма u_{ii} представляет собой относительное изменение объема при деформировании. Если рассматривать единицу объема, то u_{ii} будет просто изменением этого объема, а du_{ii} — элементом dV этого изменения. Термодинамическое соотношение принимает тогда обычный вид:

$$d\mathscr{E} = T\,dS - p\,dV. \tag{3,2a}$$

Вводя вместо энергии $\mathscr{E}$ свободную энергию тела $F = \mathscr{E} - TS$, переписываем соотношение (3,2) в виде

$$dF = -S\,dT + \sigma_{ik}\,du_{ik}. \tag{3,3}$$

Наконец, термодинамический потенциал Φ тела определяется как

$$\Phi = \mathscr{E} - TS - \sigma_{ik}u_{ik} = F - \sigma_{ik}u_{ik}. \tag{3,4}$$

Это — обобщение обычного выражения $\Phi = \mathscr{E} - TS + pV$ [1]). Подставив (3,4) в (3,3), находим

$$d\Phi = -S\,dT - u_{ik}\,d\sigma_{ik}. \tag{3,5}$$

Независимыми переменными в (3,2) и (3,3) являются соответственно S, u_{ik} и T, u_{ik}. Компоненты тензора напряжений можно получить, дифференцируя E или F по компонентам тензора деформации соответственно при постоянной энтропии S или температуре T:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial u_{ik}}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T. \tag{3,6}$$

---

[1]) При всестороннем сжатии выражение (3,4) переходит в

$$\Phi = F + pu_{ii} = F + p\,(V - V_0),$$

где $V - V_0$ — изменение объема в результате деформации. Отсюда видно, что принимаемое нами здесь определение Φ отличается от применяемого обычно в термодинамике $\Phi = F + pV$ членом $-pV_0$.

Аналогично, дифференцируя Φ по компонентам σ_{ik}, можно получить компоненты u_{ik}:

$$u_{ik} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ik}}\right)_T. \tag{3,7}$$

§ 4. Закон Гука

Для того чтобы иметь возможность применять общие термодинамические соотношения к тем или иным конкретным случаям деформаций, необходимо иметь выражение для свободной энергии тела F как функции от тензора деформации. Это выражение легко получить, воспользовавшись малостью деформаций и соответственно этому разложив свободную энергию в ряд по степеням u_{ik}. При этом мы будем пока рассматривать только изотропные тела; соответствующие выражения для кристаллов будут получены ниже, в § 10.

Рассматривая деформированное тело, находящееся при некоторой (постоянной вдоль тела) температуре, мы будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при той же температуре (эта оговорка необходима ввиду теплового расширения; см. подробнее § 6). Тогда при $u_{ik} = 0$ должны отсутствовать также и внутренние напряжения, т. е. должны быть $\sigma_{ik} = 0$. Поскольку $\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik}$, то отсюда следует, что в разложении F по степеням u_{ik} должны отсутствовать линейные члены.

Далее, поскольку свободная энергия является величиной скалярной, то и каждый член в разложении F тоже должен быть скаляром. Из компонент симметричного тензора u_{ik} можно составить два независимых скаляра второй степени; в качестве них можно выбрать квадрат u_{ii}^2 суммы диагональных компонент и сумму u_{ik}^2 квадратов всех компонент тензора u_{ik}. Разлагая F по степеням u_{ik}, мы получим, следовательно, с точностью до членов второго порядка выражение вида

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2. \tag{4,1}$$

Это есть общее выражение для свободной энергии деформированного изотропного тела. Величины λ и μ называют *коэффициентами Ламэ*.

Мы видели в § 1, что изменение объема при деформации определяется суммой u_{ii}. Если эта сумма равна нулю, то это значит, что при деформировании объем данного тела остается неизменным и меняется только его форма. Такие деформации без изменения объема называют *сдвигом*.

Обратным случаем является деформация, сопровождающаяся изменением объема, но без изменения формы. Каждый элемент объема тела при такой деформации остается подобным самому