Аналогично, дифференцируя Φ по компонентам σ_{ik}, можно получить компоненты u_{ik}:

$$u_{ik} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ik}}\right)_T. \tag{3,7}$$

§ 4. Закон Гука

Для того чтобы иметь возможность применять общие термодинамические соотношения к тем или иным конкретным случаям деформаций, необходимо иметь выражение для свободной энергии тела F как функции от тензора деформации. Это выражение легко получить, воспользовавшись малостью деформаций и соответственно этому разложив свободную энергию в ряд по степеням u_{ik}. При этом мы будем пока рассматривать только изотропные тела; соответствующие выражения для кристаллов будут получены ниже, в § 10.

Рассматривая деформированное тело, находящееся при некоторой (постоянной вдоль тела) температуре, мы будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при той же температуре (эта оговорка необходима ввиду теплового расширения; см. подробнее § 6). Тогда при $u_{ik} = 0$ должны отсутствовать также и внутренние напряжения, т. е. должны быть $\sigma_{ik} = 0$. Поскольку $\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik}$, то отсюда следует, что в разложении F по степеням u_{ik} должны отсутствовать линейные члены.

Далее, поскольку свободная энергия является величиной скалярной, то и каждый член в разложении F тоже должен быть скаляром. Из компонент симметричного тензора u_{ik} можно составить два независимых скаляра второй степени; в качестве них можно выбрать квадрат u_{ii}^2 суммы диагональных компонент и сумму u_{ik}^2 квадратов всех компонент тензора u_{ik}. Разлагая F по степеням u_{ik}, мы получим, следовательно, с точностью до членов второго порядка выражение вида

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2. \tag{4,1}$$

Это есть общее выражение для свободной энергии деформированного изотропного тела. Величины λ и μ называют *коэффициентами Ламэ*.

Мы видели в § 1, что изменение объема при деформации определяется суммой u_{ii}. Если эта сумма равна нулю, то это значит, что при деформировании объем данного тела остается неизменным и меняется только его форма. Такие деформации без изменения объема называют *сдвигом*.

Обратным случаем является деформация, сопровождающаяся изменением объема, но без изменения формы. Каждый элемент объема тела при такой деформации остается подобным самому

себе. Из § 1 следует, что тензор такой деформации имеет вид $u_{ik} = \mathrm{const}\cdot\delta_{ik}$. Такую деформацию называют *всесторонним сжатием*.

Всякую деформацию можно представить в виде суммы деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия. Для этого достаточно написать тождество

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}. \tag{4,2}$$

Первый член справа представляет собой, очевидно, чистый сдвиг, поскольку сумма его диагональных членов равна нулю (напоминаем, что $\delta_{ii} = 3$). Второй же член связан со всесторонним сжатием.

В качестве общего выражения для свободной энергии деформированного изотропного тела удобно написать вместо (4,1) другое, воспользовавшись указанным разложением произвольной деформации на сдвиг и всестороннее сжатие. Именно, выберем в качестве двух независимых скаляров второй степени суммы квадратов компонент соответственно первого и второго членов в (4,2). Тогда F будет иметь вид [1])

$$F = \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2}u_{ll}^2. \tag{4,3}$$

Величины K и μ называют соответственно *модулем всестороннего сжатия* и *модулем сдвига;* K связано с коэффициентами Ламэ соотношением

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \tag{4,4}$$

В состоянии термодинамического равновесия свободная энергия, как известно, минимальна. Если на тело не действуют никакие внешние силы, то F как функция от u_{ik} должно иметь минимум при $u_{ik} = 0$. Это значит, что квадратичная форма (4,3) должна быть положительна. Если выбрать тензор u_{ik} таким, что $u_{ll} = 0$, то в (4.3) останется только первый член; если же выбрать тензор вида $u_{ik} = \mathrm{const}\cdot\delta_{ik}$, то останется только второй член. Отсюда следует, что необходимым (и, очевидно, достаточным) условием положительности формы (4,3) является положительность каждого из коэффициентов K и μ.

Таким образом, мы приходим к результату, что модули сжатия и сдвига всегда положительны:

$$K > 0, \quad \mu > 0. \tag{4,5}$$

Воспользуемся теперь общим термодинамическим соотношением (3,6) и определим с его помощью тензор напряжений. Для

[1]) Постоянный член F_0 — свободная энергия недеформированного тела — в дальнейшем не будет нас интересовать. Поэтому мы будем для краткости всегда опускать его, подразумевая под F одну только интересующую нас свободную энергию деформации или, как говорят, упругую свободную энергию.

вычисления производных $\partial F/\partial u_{ik}$ напишем полный дифференциал dF (при постоянной температуре). Имеем

$$dF = Ku_{ll}\,du_{ll} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)d\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right).$$

Во втором члене умножение первой скобки на δ_{ik} дает нуль, так что остается

$$dF = Ku_{ll}\,du_{ll} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)du_{ik}$$

или, написав du_{ll} в виде $\delta_{ik}du_{ik}$,

$$dF = \left[Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)\right]du_{ik}.$$

Отсюда имеем для тензора напряжений

$$\sigma_{ik} = Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right). \tag{4,6}$$

Это выражение определяет тензор напряжений через тензор деформации для изотропного тела. Из него видно, что если деформация является чистым сдвигом или чистым всесторонним сжатием, то связь между σ_{ik} и u_{ik} определяется соответственно одним только модулем сдвига или модулем всестороннего сжатия.

Нетрудно получить и обратные формулы, выражающие u_{ik} через σ_{ik}. Для этого найдем сумму диагональных членов σ_{ii}. Поскольку для второго члена (4,6) эта сумма обращается в нуль, то $\sigma_{ii} = 3Ku_{ii}$, или

$$u_{ii} = \frac{1}{3K}\sigma_{ii}. \tag{4,7}$$

Подставляя это выражение в (4,6) и определяя оттуда u_{ik}, находим

$$u_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right), \tag{4,8}$$

что и определяет тензор деформации по тензору напряжений.

Равенство (4,7) показывает, что относительное изменение объема u_{ii} при всякой деформации изотропного тела зависит только от суммы σ_{ii} диагональных компонент тензора напряжений, причем связь между u_{ii} и σ_{ii} определяется только модулем всестороннего сжатия. При всестороннем (равномерном) сжатии тела тензор напряжений имеет вид $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$. Поэтому в этом случае имеем из (4,7):

$$u_{ii} = -p/K. \tag{4,9}$$

Поскольку деформации малы, то u_{ii} и p — малые величины, и мы можем написать отношение u_{ii}/p относительного изменения объема к давлению в дифференциальном виде; тогда

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$

Величину $1/K$ называют *коэффициентом всестороннего сжатия* (или просто коэффициентом сжатия).

Из (4,8) мы видим, что тензор деформации u_{ik} является линейной функцией тензора напряжений σ_{ik}. Другими словами, деформация пропорциональна приложенным к телу силам. Этот закон, имеющий место для малых деформаций, называют *законом Гука* [1]).

Приведем еще полезную форму выражения для свободной энергии деформированного тела, получающуюся непосредственно из квадратичности F по тензору деформации. Согласно теореме Эйлера имеем

$$u_{ik}\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 2F,$$

откуда, ввиду того что $\partial F/\partial u_{ik} = \sigma_{ik}$,

$$F = \sigma_{ik}u_{ik}/2. \tag{4,10}$$

Если в эту формулу подставить u_{ik}, выраженные в виде линейных комбинаций компонент σ_{ik}, то упругая энергия будет представлена как квадратичная функция величин σ_{ik}. Снова применяя теорему Эйлера, будем иметь

$$\sigma_{ik}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 2F,$$

и сравнение с (4,10) показывает, что

$$u_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}}. \tag{4,11}$$

Следует, однако, подчеркнуть, что, в то время как формула $\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik}$ является общим термодинамическим соотношением, справедливость обратной формулы (4,11) связана с выполнением закона Гука.

---

[1]) Фактически закон Гука применим практически ко всем упругим деформациям. Дело в том, что деформации обычно перестают быть упругими еще тогда, когда они настолько малы, что закон Гука является достаточно хорошим приближением (исключение представляют тела типа резины).