§ 5. Однородные деформации

Рассмотрим несколько простейших случаев *однородных деформаций*, т. е. деформаций, при которых тензор деформации постоянен вдоль всего объема тела [1]). Однородной деформацией является, например, уже рассмотренное нами равномерное всестороннее сжатие.

Рассмотрим теперь так называемое *простое растяжение* (или сжатие) стержня. Пусть стержень расположен вдоль оси z и к его концам приложены силы, растягивающие его в противоположные стороны. Эти силы действуют равномерно на всю поверхность концов стержня; сила, действующая на единицу поверхности, пусть будет p.

Поскольку деформация однородна, т. е. u_{ik} постоянны вдоль тела, то постоянен также и тензор напряжений σ_{ik}, а поэтому его можно определить непосредственно из граничных условий (2,9). На боковой поверхности стержня внешние силы отсутствуют, откуда следует, что $\sigma_{ik}n_k = 0$. Поскольку единичный вектор $\mathbf{n}$ на боковой поверхности перпендикулярен к оси z, т. е. имеет только компоненты n_x, n_y, то отсюда следует, что все компоненты σ_{ik}, за исключением только σ_{zz}, равны нулю. На поверхности концов стержня имеем $\sigma_{zi}n_i = p$, откуда $\sigma_{zz} = p$.

Из общего выражения (4,8), связывающего компоненты тензоров деформации и напряжений, мы видим, что все компоненты u_{ik} с $i \neq k$ равны нулю. Для остальных компонент находим

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)p, \quad u_{zz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu}\right)p. \qquad (5,1)$$

Компонента u_{zz} определяет относительное удлинение стержня вдоль оси z. Коэффициент при p называют *коэффициентом растяжения*, а обратную величину — *модулем растяжения* (или *модулем Юнга*) E:

$$u_{zz} = p/E, \qquad (5,2)$$

где

$$E = 9K\mu/(3K + \mu). \qquad (5,3)$$

Компоненты u_{xx} и u_{yy} определяют относительное сжатие стержня в поперечном направлении. Отношение поперечного сжатия к продольному растяжению называют *коэффициентом Пуассона* σ [2]):

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}, \qquad (5,4)$$

---

[1]) Компоненты тензора деформации как функции координат не являются вполне независимыми величинами, поскольку шесть различных компонент u_{ik} выражаются через производные всего трех независимых функций — компонент вектора $\mathbf{u}$ (см. задачу 9 § 7). Но шесть постоянных величин u_{ik} могут быть в принципе заданы произвольным образом.

[2]) Обозначение коэффициента Пуассона посредством σ, а компонент тензора напряжений посредством σ_{ik} не может привести к недоразумению, поскольку последние, в отличие от первого, всегда имеют индексы.

где

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}. \tag{5,5}$$

Поскольку K и μ всегда положительны, то коэффициент Пуассона может меняться для различных веществ только в пределах от -1 (при $K = 0$) до $1/2$ (при $\mu = 0$). Таким образом [1]),

$$-1 \leqslant \sigma \leqslant 1/2. \tag{5,6}$$

Наконец, относительное увеличение объема стержня при его растяжении равно

$$u_{ii} = p/K. \tag{5,7}$$

Свободную энергию растянутого стержня можно написать, воспользовавшись непосредственно формулой (4,10). Поскольку от нуля отлична только компонента σ_{zz}, то

$$F = \frac{1}{2} u_{zz}\sigma_{zz} = \frac{p^2}{2E}. \tag{5,8}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться, как это обычно принято, величинами E и σ вместо модулей K и μ. Эти последние, а также второй коэффициент Ламэ λ выражаются через E и σ формулами

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}. \tag{5,9}$$

Выпишем здесь общие формулы предыдущего параграфа с коэффициентами, выраженными через E и σ. Для свободной энергии имеем

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}^2\right). \tag{5,10}$$

Тензор напряжений выражается через тензор деформации согласно

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}\delta_{ik}\right). \tag{5,11}$$

Обратно:

$$u_{ik} = \frac{1}{E}[(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\sigma_{ll}\delta_{ik}]. \tag{5,12}$$

---

[1]) Фактически коэффициент Пуассона меняется только в пределах от 0 до 1/2. В настоящее время неизвестны тела, у которых было бы $\sigma < 0$, т. е. которые бы утолщались при продольном растяжении. Укажем также, что неравенству $\sigma > 0$ отвечает $\lambda > 0$; другими словами, всегда положительны оба члена не только в выражении (4, 3), но и в (4,1), хотя это и не требуется термодинамикой. Близкие к 1/2 значения σ (например, у резины) соответствуют модулю сдвига, малому по сравнению с модулем сжатия.

Поскольку формулами (5,11) и (5,12) приходится постоянно пользоваться, выпишем их здесь для удобства в расписанном по компонентам виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{xx}+\sigma(u_{yy}+u_{zz})],\\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{yy}+\sigma(u_{xx}+u_{zz})],\\
\sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{zz}+\sigma(u_{xx}+u_{yy})],\\
\sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma}u_{xy},\quad \sigma_{xz}=\frac{E}{1+\sigma}u_{xz},\quad \sigma_{yz}=\frac{E}{1+\sigma}u_{yz}
\end{aligned} \tag{5,13}$$

и обратные формулы:

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{1}{E}[\sigma_{xx}-\sigma(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})],\\
u_{yy} &= \frac{1}{E}[\sigma_{yy}-\sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})],\\
u_{zz} &= \frac{1}{E}[\sigma_{zz}-\sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})],\\
u_{xy} &= \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy},\quad u_{xz}=\frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xz},\quad u_{yz}=\frac{1+\sigma}{E}\sigma_{yz}.
\end{aligned} \tag{5,14}$$

Рассмотрим теперь сжатие стержня, боковые стороны которого закреплены так, что его поперечные размеры не могут меняться. Внешние силы, производящие сжатие стержня, приложены к его основаниям и действуют вдоль его длины, которую мы опять выберем в качестве оси z. Такую деформацию называют *односторонним сжатием*. Поскольку стержень деформируется только вдоль оси z, то из всех компонент u_{ik} от нуля отлична только u_{zz}. Из (5,13) имеем теперь

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz},\quad \sigma_{zz}=\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz}.$$

Обозначая опять сжимающую силу посредством p ($\sigma_{zz}=p$; p отрицательно при сжатии), имеем

$$u_{zz}=\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}p. \tag{5,15}$$

Коэффициент при p называется коэффициентом одностороннего сжатия. Для напряжений, возникающих в поперечном направлении, имеем

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=p\frac{\sigma}{1-\sigma}. \tag{5,16}$$

Наконец, для свободной энергии стержня имеем

$$F=p^2\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2E(1-\sigma)}. \tag{5,17}$$