§ 6. Деформации с изменением температуры

Рассмотрим теперь деформации, сопровождающиеся изменением температуры тела; изменение температуры может происходить как в результате самого процесса деформирования, так и по посторонним причинам.

Будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при некоторой заданной температуре T_0. Если тело находится при температуре T, отличной от T_0, то даже при отсутствии внешних сил оно будет, вообще говоря, деформировано в связи с наличием теплового расширения. Поэтому в разложение свободной энергии $F(T)$ будут входить не только квадратичные, но и линейные по тензору деформации члены. Из компонент тензора второго ранга u_{ik} можно составить всего только одну линейную скалярную величину — сумму u_{ii} его диагональных компонент. Далее мы будем предполагать, что сопровождающее деформацию изменение $T - T_0$ температуры мало. Тогда можно считать, что коэффициент при u_{ii} в разложении F (который должен обращаться в нуль при $T = T_0$) просто пропорционален разности $T - T_0$. Таким образом, получим для свободной энергии следующую формулу (заменяющую (4,3)):

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T - T_0)u_{ll} + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2}u_{ll}^2, \tag{6,1}$$

где коэффициент при $T - T_0$ написан в виде $-K\alpha$. Величины μ, K, α надо считать здесь постоянными; учет их зависимости от температуры привел бы к величинам высшего порядка малости.

Дифференцируя F по u_{ik}, получим тензор напряжений. Имеем

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - {}^1/_3\delta_{ik}u_{ll}). \tag{6,2}$$

Первый член здесь представляет собой дополнительные напряжения, связанные с изменением температуры тела. При свободном тепловом расширении тела (при отсутствии внешних сил) внутренние напряжения должны отсутствовать. Приравнивая σ_{ik} нулю, найдем, что u_{ik} имеет вид $\mathrm{const}\cdot\delta_{ik}$, причем

$$u_{ll} = \alpha(T - T_0). \tag{6,3}$$

Но u_{ll} представляет собой относительное изменение объема при деформации. Таким образом, α является не чем иным, как *коэффициентом теплового расширения* тела.

Среди различных (в термодинамическом смысле) типов деформаций существенны изотермические и адиабатические деформации. При изотермических деформациях температура тела не меняется. Соответственно этому в (6,1) надо положить $T = T_0$, и мы возвращаемся к обычным формулам; коэффициенты K и μ можно поэтому назвать *изотермическими модулями*.

Адиабатическими являются деформации, при которых не происходит обмена теплом между различными участками тела, а также, конечно, и между телом и окружающей средой. Энтропия S остается при этом постоянной. Как известно, энтропия равна производной $-\partial F/\partial T$ от свободной энергии по температуре. Дифференцируя выражение (6,1), находим с точностью до членов первого порядка по u_{ik}

$$S(T) = S_0(T) + K\alpha u_{ll}. \tag{6,4}$$

Приравняв это выражение постоянной, можно определить изменение температуры при деформации, которое оказывается пропорциональным u_{ll}:

$$\frac{C_v}{T_0}(T - T_0) = -K\alpha u_{ll}. \tag{6,5}$$

Подставив это выражение в (6,2), получим для σ_{ik} выражение обычного типа

$$\sigma_{ik} = K_{\text{ад}} u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - {}^1/_3\delta_{ik}u_{ll}\right) \tag{6,6}$$

с тем же модулем сдвига, но с другим модулем сжатия $K_{\text{ад}}$. Связь адиабатического модуля $K_{\text{ад}}$ с обычным, изотермическим модулем K можно, однако, найти и непосредственно по общей термодинамической формуле

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + \frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2$$

(C_p — теплоемкость при постоянном давлении, отнесенная к единице объема тела). Если понимать под V объем, занимаемый веществом, находившимся до деформации в единице объема тела, то производные $\partial V/\partial T$ и $\partial V/\partial p$ определяют относительные изменения объема соответственно при нагревании и при сжатии. Другими словами,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -\frac{1}{K_{\text{ад}}}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{K}.$$

Таким образом, получаем для связи между адиабатическими и изотермическими модулями [1])

$$\frac{1}{K_{\text{ад}}} = \frac{1}{K} - \frac{T\alpha^2}{C_p}, \quad \mu_{\text{ад}} = \mu. \tag{6,7}$$

Для *адиабатических* модуля растяжения и коэффициента Пуассона легко получаем следующие соотношения:

$$E_{\text{ад}} = \frac{E}{1 - ET\alpha^2/9C_p}, \quad \sigma_{\text{ад}} = \frac{\sigma + ET\alpha^2/9C_p}{1 - ET\alpha^2/9C_p}. \tag{6,8}$$

[1]) Для того чтобы получить эти формулы из (6,5), (6,6), надо было бы использовать еще и известную термодинамическую формулу $C_p - C_v = T\alpha^2K$.

В реальных случаях величина $ET\alpha^2/C_p$ обычно мала, и поэтому с достаточной точностью можно написать:

$$E_{\text{ад}} = E + E^2 \frac{T\alpha^2}{9C_p}, \quad \sigma_{\text{ад}} = \sigma + (1+\sigma) E \frac{T\alpha^2}{9C_p}. \tag{6,9}$$

При изотермической деформации тензор напряжений выражается в виде производных от свободной энергии:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T.$$

При постоянной же энтропии надо написать (см. (3,6)):

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial u_{ik}}\right)_S,$$

где $\mathscr{E}$ — внутренняя энергия. Соответственно этому при адиабатических деформациях выражение, аналогичное (4,3), определяет не свободную энергию, а просто внутреннюю энергию единицы объема тела:

$$\mathscr{E} = \frac{K_{\text{ад}}}{2} u_{ll}^2 + \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll}\delta_{ik}\right)^2. \tag{6,10}$$

§ 7. Уравнения равновесия изотропных тел

Выведем теперь уравнения равновесия изотропных твердых тел. Для этого надо подставить в общие уравнения (2,7)

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$$

выражение (5,11) для тензора напряжений. Имеем

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}.$$

Подставляя сюда $u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$, получим уравнения равновесия в виде

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0. \tag{7,1}$$

Эти уравнения удобно переписать в векторных обозначениях. В этих обозначениях величины $\partial^2 u_i/\partial x_k^2$ являются компонентами вектора $\Delta\mathbf{u}$, а $\partial u_l/\partial x_l \equiv \operatorname{div}\mathbf{u}$. Таким образом, уравнения равновесия приобретают вид

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = -\rho\mathbf{g}\frac{2(1+\sigma)}{E}. \tag{7,2}$$

Иногда бывает удобным писать это уравнение в несколько ином виде, воспользовавшись известной формулой векторного анализа:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}.$$