В реальных случаях величина $ET\alpha^2/C_p$ обычно мала, и поэтому с достаточной точностью можно написать:

$$E_{\text{ад}} = E + E^2 \frac{T\alpha^2}{9C_p}, \quad \sigma_{\text{ад}} = \sigma + (1+\sigma) E \frac{T\alpha^2}{9C_p}. \tag{6,9}$$

При изотермической деформации тензор напряжений выражается в виде производных от свободной энергии:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T.$$

При постоянной же энтропии надо написать (см. (3,6)):

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial u_{ik}}\right)_S,$$

где $\mathscr{E}$ — внутренняя энергия. Соответственно этому при адиабатических деформациях выражение, аналогичное (4,3), определяет не свободную энергию, а просто внутреннюю энергию единицы объема тела:

$$\mathscr{E} = \frac{K_{\text{ад}}}{2} u_{ll}^2 + \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll}\delta_{ik}\right)^2. \tag{6,10}$$

§ 7. Уравнения равновесия изотропных тел

Выведем теперь уравнения равновесия изотропных твердых тел. Для этого надо подставить в общие уравнения (2,7)

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$$

выражение (5,11) для тензора напряжений. Имеем

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}.$$

Подставляя сюда $u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$, получим уравнения равновесия в виде

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0. \tag{7,1}$$

Эти уравнения удобно переписать в векторных обозначениях. В этих обозначениях величины $\partial^2 u_i/\partial x_k^2$ являются компонентами вектора $\Delta\mathbf{u}$, а $\partial u_l/\partial x_l \equiv \operatorname{div}\mathbf{u}$. Таким образом, уравнения равновесия приобретают вид

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = -\rho\mathbf{g}\frac{2(1+\sigma)}{E}. \tag{7,2}$$

Иногда бывает удобным писать это уравнение в несколько ином виде, воспользовавшись известной формулой векторного анализа:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}.$$

Тогда (7,2) приобретает вид

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = -\rho\mathbf{g}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}. \qquad (7,3)$$

Мы пишем уравнения равновесия в однородном поле сил тяжести, имея в виду, что последние являются наиболее обычными в теории упругости объемными силами. При наличии каких-либо иных объемных сил вектор $\rho\mathbf{g}$ в правой стороне уравнения должен быть заменен соответствующей другой плотностью объемных сил.

Наиболее существен случай, когда деформация вызывается не объемными силами, а силами, приложенными к поверхности тела. Тогда уравнение равновесия гласит

$$(1-2\sigma)\,\Delta\mathbf{u} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \qquad (7,4)$$

или в другом виде

$$2(1-\sigma)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - (1-2\sigma)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0. \qquad (7,5)$$

Внешние силы входят в решение только через посредство граничных условий.

Применяя к уравнению (7,4) операцию div и помня, что $\operatorname{div}\operatorname{grad} \equiv \Delta$, находим

$$\Delta\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad (7,6)$$

т. е. величина $\operatorname{div}\mathbf{u}$ (определяющая изменение объема при деформации) является гармонической функцией. Применяя же к уравнению (7,4) оператор Лапласа Δ, получим теперь

$$\Delta\Delta\mathbf{u} = 0, \qquad (7,7)$$

т. е. в равновесии вектор деформации удовлетворяет *бигармоническому уравнению*. Эти результаты остаются в силе и в однородном поле тяжести (при операциях дифференцирования правая сторона уравнения (7,2) исчезает), но они несправедливы в общем случае переменных вдоль тела объемных внешних сил.

Тот факт, что вектор деформации удовлетворяет бигармоническому уравнению, не означает, разумеется, что общий интеграл уравнений равновесия (при отсутствии объемных сил) есть произвольная бигармоническая векторная функция; следует помнить, что функция $\mathbf{u}(x, y, z)$ должна в действительности удовлетворять еще и дифференциальному уравнению более низкого порядка (7,4). В то же время оказывается возможным выразить общий интеграл уравнений равновесия через производные от произвольного бигармонического вектора (см. задачу 10).

Если тело неравномерно нагрето, то в уравнении равновесия должен быть добавлен дополнительный член. В тензоре напряже-

ний должен быть учтен член $-K\alpha(T-T_0)\delta_{ik}$ (см. (6,2)) и соответственно в $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ возникает член

$$-K\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i}=-\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)}\frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

В результате получаем уравнения равновесия в виде

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-\frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}=\alpha\nabla T. \qquad (7,8)$$

Остановимся на частном случае *плоской деформации*, при которой во всем теле одна из компонент вектора смещения равна нулю ($u_z=0$), а компоненты u_x, u_y зависят только от x, y. При этом тождественно обращаются в нуль компоненты u_{zz}, u_{xz}, u_{yz} тензора деформации, а с ними и компоненты σ_{xz}, σ_{yz} тензора напряжений (но не продольное напряжение σ_{zz}, существование которого должно обеспечить постоянство длины тела вдоль оси z).

Поскольку все величины не зависят от координаты z, то уравнения равновесия (при отсутствии внешних объемных сил) $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k=0$ сводятся в данном случае к двум уравнениям:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0. \qquad (7,9)$$

Наиболее общим видом функций σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy}, удовлетворяющих этим уравнениям, является

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2},\quad \sigma_{xy}=-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y},\quad \sigma_{yy}=\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}, \qquad (7,10)$$

где χ — произвольная функция от x и y. Легко получить уравнение, которому должна удовлетворять эта функция. Такое уравнение должно существовать в силу того, что три величины σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} выражаются в действительности всего через две величины u_x, u_y и потому не являются независимыми. С помощью формул (5,13) найдем для плоской деформации

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}(u_{xx}+u_{yy}).$$

Но

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=\Delta\chi,\quad u_{xx}+u_{yy}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\equiv\operatorname{div}\mathbf{u},$$

и поскольку $\operatorname{div}\mathbf{u}$ есть, согласно (7,6), гармоническая функция, то мы заключаем, что функция χ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta\chi=0, \qquad (7,11)$$

т. е. является бигармонической. Функцию χ называют *функцией напряжений*. После того как плоская задача решена и функция χ

известна, продольное напряжение σ_{zz} определяется непосредственно по формуле

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}(u_{xx}+u_{yy}) = \sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}),$$

или

$$\sigma_{zz} = \sigma\Delta\chi. \tag{7,12}$$

Задачи

1. Определить деформацию длинного стержня (длины l), стоящего вертикально в поле тяжести.

Решение. Направляем ось z по оси стержня, а плоскость x, y — в плоскости его нижнего основания. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{xi}}{\partial x_i} = \frac{\partial\sigma_{yi}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{zi}}{\partial x_i} = \rho g.$$

На боковой поверхности стержня должны обращаться в нуль все компоненты σ_{ik}, кроме σ_{zz}, а на верхнем ($z = l$) основании $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. Удовлетворяющее этим условиям решение уравнений равновесия есть

$$\sigma_{zz} = -\rho g(l-z),$$

а все остальные $\sigma_{ik} = 0$. По σ_{ik} определяем u_{ik} в виде

$$u_{xx} = u_{yy} = \frac{\sigma}{E}\rho g(l-z), \quad u_{zz} = -\frac{\rho g(l-z)}{E}, \quad u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0,$$

а отсюда интегрированием — компоненты вектора деформации

$$u_x = \frac{\sigma}{E}\rho g(l-z)x,$$

$$u_y = \frac{\sigma}{E}\rho g(l-z)y,$$

$$u_z = -\frac{\rho g}{2E}\{l^2-(l-z)^2-\sigma(x^2+y^2)\}.$$

Выражение для u_z удовлетворяет граничному условию $u_z = 0$ только в одной точке нижней поверхности стержня. Поэтому полученное решение неприменимо вблизи нижнего конца стержня.

2. Определить деформацию полого шара (наружный и внутренний радиусы R_2 и R_1), внутри которого действует давление p_1; давление снаружи p_2.

Решение. Вводим сферические координаты с началом в центре шара. Деформация $\mathbf{u}$ направлена везде по радиусу и является функцией только от r. Поэтому $\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0$, и уравнение (7,5) приобретает вид

$$\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2u)}{dr} = \text{const} \equiv 3a,$$

или

$$u = ar + b/r^2.$$

Компоненты тензора деформации (см. формулы (1,7)):

$$u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3}.$$

Радиальное напряжение

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{rr}+2\sigma u_{\theta\theta}]=\frac{E}{1-2\sigma}a-\frac{2E}{1+\sigma}\frac{b}{r^3}.$$

Постоянные a и b определяются из граничных условий: $\sigma_{rr}=-p_1$ при $r=R_1$ и $\sigma_{rr}=-p_2$ при $r=R_2$. Отсюда находим

$$a=\frac{p_1R_1^3-p_2R_2^3}{R_2^3-R_1^3}\frac{1-2\sigma}{E},\quad b=\frac{R_1^3R_2^3(p_1-p_2)}{R_2^3-R_1^3}\frac{1+\sigma}{2E}.$$

Так, распределение напряжений по толщине шарового слоя, внутри которого действует давление $p_1=p$, а снаружи $p_2=0$, дается формулами

$$\sigma_{rr}=\frac{pR_1^3}{R_2^3-R_1^3}\left(1-\frac{R_2^3}{r^3}\right),\quad \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{pR_1^3}{R_2^3-R_1^3}\left(1+\frac{R_2^3}{2r^3}\right).$$

Для тонкой сферической оболочки толщины $h=R_2-R_1\ll R$ имеем приближенно

$$u=\frac{pR^2(1-\sigma)}{2Eh},\quad \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{pR}{2h},\quad \bar{\sigma}_{rr}=\frac{p}{2}$$

($\bar{\sigma}_{rr}$ — среднее по толщине оболочки значение радиального напряжения).

Распределение напряжений в неограниченной упругой среде с шарообразной полостью (радиуса R), подвергаемой равномерному всестороннему сжатию, получим, положив $R_1=R$, $R_2=\infty$, $p_1=0$, $p_2=p$:

$$\sigma_{rr}=-p\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right),\quad \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}=-p\left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right).$$

На границе полости тангенциальные напряжения $\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}=-3p/2$, т. е. превышают давление на бесконечности.

3. Определить деформацию сплошной сферы (радиуса R) под влиянием собственного гравитационного поля.

Решение. Сила тяготения, действующая на единицу массы сферического тела, равна $-gr/R$. Подставив это выражение вместо g в уравнение (7,3), получим для радиального смещения следующее уравнение:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2u)}{dr}\right)=\rho g\frac{r}{R}.$$

Решение, конечное при $r=0$ и удовлетворяющее условию $\sigma_{rr}=0$ при $r=R$, есть

$$u=-\frac{g\rho R(1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)}r\left[\frac{3-\sigma}{1+\sigma}-\frac{r^2}{R^2}\right].$$

Отметим, что внутри сферической поверхности радиуса $R\left(\frac{3-\sigma}{3(1+\sigma)}\right)^{1/2}$ вещество сжато ($u_{rr}<0$), а вне ее — растянуто ($u_{rr}>0$). Давление в центре шара оказывается равным

$$\frac{3-\sigma}{10(1-\sigma)}g\rho R.$$

4. Определить деформацию полой цилиндрической трубы (наружный и внутренний радиусы R_2 и R_1), внутри которой действует давление p; давление снаружи отсутствует[1]).

---

[1]) В задачах 4, 5, 7 предполагается, что цилиндры удерживаются при постоянной длине, так что продольная деформация отсутствует.

Решение. Вводим цилиндрические координаты с осью z по оси трубы. При однородном вдоль трубы давлении деформация представляет собой чисто радиальное смещение $u_r = u(r)$. Аналогично задаче 2 имеем теперь

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr} = \text{const} \equiv 2a.$$

Отсюда

$$u = ar + b/r.$$

Отличные от нуля компоненты тензора деформации (см. формулы (1,8)):

$$u_{rr} = \frac{du}{dr} = a - \frac{b}{r^2}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^2}.$$

Из условий $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R_2$ и $\sigma_{rr} = -p$ при $r = R_1$ находим

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1+\sigma}{E}.$$

Распределение напряжений по толщине трубы дается формулами

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right),$$

$$\sigma_{zz} = 2\sigma\frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

5. Определить деформацию цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси.

Решение. Написав в (7,3) центробежную силу $\rho\Omega^2 r$ вместо силы тяжести (Ω — угловая скорость), получаем в цилиндрических координатах для смещения $u_r = u(r)$ уравнение

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr}\right) = -\rho\Omega^2 r.$$

Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R$, есть

$$u = \frac{\rho\Omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r\left[(3-2\sigma)R^2 - r^2\right].$$

6. Определить деформацию неравномерно нагретого шара со сферически симметричным распределением температуры.

Решение. В сферических координатах уравнение (7,8) для чисто радиальной деформации гласит:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2u)}{dr}\right) = \alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\frac{dT}{dr}.$$

Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R$, есть

$$u = \alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\left\{\frac{1}{r^2}\int_0^r T(r)r^2\,dr + \frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma}\frac{r}{R^3}\int_0^R T(r)r^2\,dr\right\}.$$

Температура $T(r)$ отсчитывается от значения, при котором равномерно нагретый шар считается недеформированным. В качестве этой температуры здесь выбрана температура внешней поверхности шара, так что $T(R) = 0$.

7. То же для неравномерно нагретого цилиндра с осесимметричным распределением температуры.

Решение. Аналогичным путем в цилиндрических координатах получаем

$$u = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r T(r)\, r dr + (1-2\sigma) \frac{r}{R^2} \int_0^R T(r)\, r\, dr \right\}.$$

8. Определить деформацию неограниченной упругой среды с заданным распределением температуры $T(x, y, z)$ таким, что на бесконечности температура стремится к постоянному значению T_0 и деформация отсутствует.

Решение. Уравнение (7,8) имеет, очевидно, решение, в котором

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} [T(x, y, z) - T_0].$$

Вектор $\mathbf{u}$, дивергенция которого равна заданной функции, определенной во всем пространстве и обращающейся в нуль на бесконечности, а ротор которого тождественно исчезает, может быть написан, как известно из векторного анализа, в виде

$$\mathbf{u}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\operatorname{div}' \mathbf{u}(x', y', z')}{r} dV',$$

где $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$. Поэтому получаем общее решение поставленной задачи в виде

$$\mathbf{u} = -\frac{\alpha(1+\sigma)}{12\pi(1-\sigma)} \nabla \int \frac{T' - T_0}{r} dV', \tag{1}$$

где $T' \equiv T(x', y', z')$.

Если в очень малом участке объема неограниченной среды (в начале координат) выделяется конечное количество тепла q, то распределение температуры можно написать в виде (C — теплоемкость среды)

$$T - T_0 = \frac{q}{C} \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z),$$

где δ обозначает δ-функцию. Интеграл в (1) равен тогда q/Cr, и деформация дается формулой

$$\mathbf{u} = \frac{\alpha(1+\sigma) q}{12\pi(1-\sigma) C} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

9. Вывести уравнения равновесия изотропного тела (при отсутствии объемных сил), выраженные через компоненты тензора напряжений.

Решение. Искомая система уравнений содержит наряду с тремя уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{1}$$

еще уравнения, являющиеся следствием того факта, что шесть различных компонент u_{ik} не являются независимыми величинами. Для вывода этих уравнений пишем сначала систему дифференциальных соотношений, которым удовлетворяют компоненты тензора u_{ik}. Легко видеть, что величины

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

тождественно удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_l\, \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{lm}}{\partial x_i\, \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k\, \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{km}}{\partial x_i\, \partial x_l}.$$

Здесь имеется всего шесть существенно различных соотношений (соответствующих значениям i, k, l, m: 1122, 1133, 2233, 1123, 2213, 3312); мы сохраним их все, упростив написанное тензорное равенство по индексам l, m:

$$\Delta u_{ik} + \frac{\partial^2 u_{ll}}{\partial x_i\, \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k\, \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i\, \partial x_l}. \tag{2}$$

Подставляя сюда u_{ik}, выраженное через σ_{ik} согласно (5,12), и учитывая (1), получим искомые уравнения

$$(1 + \sigma)\, \Delta\sigma_{ik} + \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0. \tag{3}$$

Эти уравнения остаются в силе и при наличии постоянных вдоль тела внешних объемных сил.

Упростив уравнение (3) по индексам i, k, найдем, что

$$\Delta\sigma_{ll} = 0,$$

т. е. σ_{ll} — гармоническая функция. Применив же теперь к этому уравнению операцию Δ, найдем, что

$$\Delta\Delta\sigma_{ik} = 0,$$

т. е. компоненты σ_{ik} — бигармонические функции; эти результаты следуют, впрочем, уже непосредственно из (7,6) и (7,7) ввиду линейной связи между σ_{ik} и u_{ik}.

10. Выразить общий интеграл уравнений равновесия (при отсутствии объемных сил) через произвольный бигармонический вектор (*Б. Г. Галёркин*, 1930).

Решение. Естественно искать решение уравнения (7,4) в виде

$$\mathbf{u} = \Delta\mathbf{f} + A\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \mathbf{f}.$$

Отсюда $\mathrm{div}\, \mathbf{u} = (1 + A)\, \mathrm{div}\, \Delta\mathbf{f}$. Подставляя это в (7,4), получим

$$(1 - 2\sigma)\, \Delta\Delta\mathbf{f} + [2(1 - \sigma) A + 1]\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \Delta\mathbf{f} = 0.$$

Отсюда видно, что если $\mathbf{f}$ — произвольный бигармонический вектор

$$\Delta\Delta\mathbf{f} = 0,$$

то

$$\mathbf{u} = \Delta\mathbf{f} - \frac{1}{2(1 - \sigma)}\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \mathbf{f}.$$

11. Выразить напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$ при плоской деформации (в полярных координатах r, φ) в виде производных от функции напряжений.

Решение. Поскольку искомые выражения не могут зависеть от выбора начала отсчета полярного угла φ, то они не содержат его явным образом. Поэтому можно применить следующий прием: преобразуем декартовы производные (7,10) в производные по переменным r, φ, после чего замечаем, что

$$\sigma_{rr} = \sigma_{xx}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{xy} \text{ при } \varphi = 0$$

(угол φ отсчитывается от оси x). Таким образом, получим

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right).$$

12. Определить распределение напряжений в неограниченной упругой среде с шаровой полостью, подвергаемой (на бесконечности) однородной деформации.

Решение. Общая однородная деформация может быть представлена в виде наложения однородного всестороннего растяжения (или сжатия) и однородного сдвига. Первое было рассмотрено в задаче 2, так что достаточно рассмотреть однородный сдвиг.

Пусть $\sigma_{ik}^{(0)}$ — однородное поле напряжений, которое имело бы место во всем пространстве при отсутствии полости; при чистом сдвиге $\sigma_{ii}^{(0)} = 0$. Соответствующий вектор смещения обозначаем как $\mathbf{u}^{(0)}$ и ищем искомое решение в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)}$, где обусловленная наличием полости функция $\mathbf{u}^{(1)}$ исчезает на бесконечности.

Всякое решение бигармонического уравнения может быть написано в виде линейной комбинации центрально-симметрических решений и их производных различных порядков по координатам. Независимыми центрально-симметрическими решениями являются r^2, r, $1/r$, 1. Поэтому наиболее общий вид, который может иметь бигармонический вектор $\mathbf{u}^{(1)}$, зависящий, как от параметров, только от компонент постоянного тензора $\sigma_{ik}^{(0)}$ и обращающийся в нуль на бесконечности, есть

$$u_i^{(1)} = A\sigma_{ik}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} + B\sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i\, \partial x_k\, \partial x_l} \frac{1}{r} + C\sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i\, \partial x_k\, \partial x_l} r. \qquad (1)$$

Подставив это выражение в уравнение (7,4), получим

$$(1-2\sigma) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} =$$

$$= [2(1-2\sigma)C + (A+2C)]\, \sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i\, \partial x_k\, \partial x_l} \frac{1}{r} = 0,$$

откуда

$$A = -4C(1-\sigma).$$

Еще два соотношения между постоянными A, B, C получаются из условия на границе полости:

$$\left(\sigma_{ik}^{(0)} + \sigma_{ik}^{(1)}\right) n_k = 0 \text{ при } r = R$$

(R — радиус полости, начало координат выбрано в ее центре, $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$). Довольно длинное вычисление с помощью (1) приводит к следующим значениям:

$$B = \frac{CR^2}{5}, \quad C = \frac{5R^3(1+\sigma)}{2E(7-5\sigma)}.$$

Окончательное выражение для распределения напряжений гласит:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} \left[1 + \frac{5(1-2\sigma)}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^3 + \frac{3}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^5\right] +$$
$$+ \frac{15}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \left[\sigma - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right] (\sigma_{ll}^{(0)} n_k n_l + \sigma_{kl}^{(0)} n_l n_i) +$$
$$+ \frac{15}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \left[-5 + 7\left(\frac{R}{r}\right)^2\right] \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m n_i n_k +$$
$$+ \frac{15}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \left[1 - 2\sigma - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right] \delta_{ik} \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m.$$

Для того чтобы получить распределение напряжений при произвольных (не чисто сдвиговых) $\sigma_{ik}^{(0)}$, надо заменить в этом выражении $\sigma_{ik}^{(0)}$ на $\sigma_{ik}^{(0)} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}^{(0)}$ и прибавить выражение

$$\frac{1}{3}\sigma_{ll}^{(0)} \left[\delta_{ik} + \frac{R^3}{2r^3}(\delta_{ik} - 3n_i n_k)\right],$$

соответствующее равномерному однородному растяжению на бесконечности (ср. задачу 2). Выпишем здесь результат, получающийся в общем случае для напряжений на границе полости:

$$\sigma_{ik} = \frac{15}{7-5\sigma}\left\{(1-\sigma)\left(\sigma_{ik}^{(0)} - \sigma_{il}^{(0)}n_l n_k - \sigma_{kl}^{(0)}n_l n_i\right) + \sigma_{lm}^{(0)}n_l n_m n_i n_k - \right.$$
$$\left. - \sigma\sigma_{lm}^{(0)}n_l n_m \delta_{ik} + \frac{5\sigma-1}{10}\sigma_{ll}^{(0)}\left(\delta_{ik} - n_i n_k\right)\right\}.$$

Вблизи отверстия напряжения значительно превышают напряжения на бесконечности, причем это увеличение напряжений имеет резко выраженный местный характер, быстро убывая с расстоянием (так называемая концентрация напряжений у отверстия). Так, если среда подвергается простому однородному растяжению (отлично от нуля только $\sigma_{zz}^{(0)}$), то наибольшие напряжения будут иметь место на экваторе полости, причем здесь

$$\sigma_{zz} = \frac{27-15\sigma}{2(7-5\sigma)}\sigma_{zz}^{(0)}.$$

§ 8. Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью

Рассмотрим упругую среду, заполняющую бесконечное полупространство, т. е. ограниченную с одной стороны бесконечной плоскостью. Определим деформацию среды под влиянием сил, приложенных к ее свободной поверхности [1]). Распределение этих сил должно удовлетворять только одному условию: они должны исчезать на бесконечности так, чтобы на бесконечности деформация отсутствовала. Для такого случая уравнения равновесия могут быть проинтегрированы в общем виде (*J. Boussinesq*, 1885).

Во всем объеме, занимаемом средой, имеет место уравнение равновесия (7,4)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + (1-2\sigma)\Delta\mathbf{u} = 0. \tag{8,1}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} + \nabla\varphi, \tag{8,2}$$

где φ — некоторый скаляр, а вектор $\mathbf{f}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\mathbf{f} = 0. \tag{8,3}$$

Подстановка (8,2) в (8,1) приводит тогда к следующему уравнению для φ:

$$2(1-\sigma)\Delta\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{f}. \tag{8,4}$$

Выберем свободную поверхность упругой среды в качестве плоскости x, y; области среды соответствуют положительные z.

[1]) Наиболее прямой и стандартный метод решения поставленной задачи заключается в применении к уравнению (8,1) метода Фурье. При этом, однако, приходится вычислять довольно сложные интегралы. Излагаемый ниже метод, основанный на применении ряда искусственных приемов, связан с более простыми вычислениями.