соответствующее равномерному однородному растяжению на бесконечности (ср. задачу 2). Выпишем здесь результат, получающийся в общем случае для напряжений на границе полости:

$$\sigma_{ik} = \frac{15}{7-5\sigma}\left\{(1-\sigma)\left(\sigma_{ik}^{(0)} - \sigma_{il}^{(0)}n_l n_k - \sigma_{kl}^{(0)}n_l n_i\right) + \sigma_{lm}^{(0)}n_l n_m n_i n_k - \right.$$
$$\left. - \sigma\sigma_{lm}^{(0)}n_l n_m \delta_{ik} + \frac{5\sigma-1}{10}\sigma_{ll}^{(0)}\left(\delta_{ik} - n_i n_k\right)\right\}.$$

Вблизи отверстия напряжения значительно превышают напряжения на бесконечности, причем это увеличение напряжений имеет резко выраженный местный характер, быстро убывая с расстоянием (так называемая концентрация напряжений у отверстия). Так, если среда подвергается простому однородному растяжению (отлично от нуля только $\sigma_{zz}^{(0)}$), то наибольшие напряжения будут иметь место на экваторе полости, причем здесь

$$\sigma_{zz} = \frac{27-15\sigma}{2(7-5\sigma)}\sigma_{zz}^{(0)}.$$

§ 8. Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью

Рассмотрим упругую среду, заполняющую бесконечное полупространство, т. е. ограниченную с одной стороны бесконечной плоскостью. Определим деформацию среды под влиянием сил, приложенных к ее свободной поверхности [1]). Распределение этих сил должно удовлетворять только одному условию: они должны исчезать на бесконечности так, чтобы на бесконечности деформация отсутствовала. Для такого случая уравнения равновесия могут быть проинтегрированы в общем виде (*J. Boussinesq*, 1885).

Во всем объеме, занимаемом средой, имеет место уравнение равновесия (7,4)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + (1-2\sigma)\Delta\mathbf{u} = 0. \tag{8,1}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} + \nabla\varphi, \tag{8,2}$$

где φ — некоторый скаляр, а вектор $\mathbf{f}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\mathbf{f} = 0. \tag{8,3}$$

Подстановка (8,2) в (8,1) приводит тогда к следующему уравнению для φ:

$$2(1-\sigma)\Delta\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{f}. \tag{8,4}$$

Выберем свободную поверхность упругой среды в качестве плоскости x, y; области среды соответствуют положительные z.

[1]) Наиболее прямой и стандартный метод решения поставленной задачи заключается в применении к уравнению (8,1) метода Фурье. При этом, однако, приходится вычислять довольно сложные интегралы. Излагаемый ниже метод, основанный на применении ряда искусственных приемов, связан с более простыми вычислениями.

Напишем функции f_x и f_y в виде производных по z от некоторых функций g_x и g_y:

$$f_x = \frac{\partial g_x}{\partial z}, \quad f_y = \frac{\partial g_y}{\partial z}. \tag{8,5}$$

Поскольку f_x и f_y — гармонические функции, то можно всегда выбрать функции g_x, g_y так, чтобы и они удовлетворяли уравнению Лапласа:

$$\Delta g_x = 0, \quad \Delta g_y = 0. \tag{8,6}$$

Уравнение (8,4) принимает теперь вид

$$2(1-\sigma)\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + f_z\right).$$

Имея в виду, что g_x, g_y, f_z — гармонические функции, легко убедиться в том, что удовлетворяющая этому уравнению функция φ может быть написана как

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\sigma)}\left(f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + \psi, \tag{8,7}$$

где ψ — опять гармоническая функция:

$$\Delta\psi = 0. \tag{8,8}$$

Таким образом, задача об определении деформации $\mathbf{u}$ сведена к нахождению функций g_x, g_y, f_z, ψ, которые все удовлетворяют уравнению Лапласа.

Выпишем теперь граничные условия, которые должны выполняться на свободной поверхности среды (на плоскости $z = 0$).

Поскольку единичный вектор внешней нормали $\mathbf{n}$ направлен в отрицательном направлении оси z, то, согласно общей формуле (2,9), должно быть $\sigma_{ti} = -P_i$. Воспользовавшись для σ_{ik} общим выражением (5,11) и выражая компоненты вектора $\mathbf{u}$ через вспомогательные величины g_x, g_y, f_z, ψ, получим после простого вычисления граничные условия в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2}\bigg|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\bigg|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_x, \tag{8,9}$$

$$\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2}\bigg|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\bigg|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_y,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\bigg|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_z. \tag{8,10}$$

Компоненты P_x, P_y, P_z внешних сил, приложенных к поверхности, являются заданными функциями координат x, y, обращающимися в нуль на бесконечности.

Формулы, с помощью которых введены вспомогательные величины g_x, g_y, f_z, ψ, не определяют их вполне однозначным образом; в их выборе остается еще некоторый произвол. Поэтому можно наложить на эти величины еще какое-либо произвольное дополнительное условие. В качестве такового удобно потребовать обращения в нуль величины, стоящей в фигурных скобках в уравнениях (8,9) [1]):

$$(1-2\sigma)f_z-\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)+4(1-\sigma)\frac{\partial\psi}{\partial z}=0. \qquad (8,11)$$

Тогда условия (8,9) упрощаются и дают

$$\left.\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2}\right|_{z=0}=-\frac{2(1+\sigma)}{E}P_x,\quad \frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2}=-\frac{2(1+\sigma)}{E}P_y. \qquad (8,12)$$

Уравнения (8,10—12) достаточны для полного вычисления гармонических функций g_x, g_y, f_z, ψ.

Для упрощения записи дальнейших формул мы рассмотрим случай, когда на свободную поверхность упругого полупространства действует *сосредоточенная* сила $\mathbf{F}$, т. е. сила, приложенная к весьма малому участку поверхности, который можно считать точечным. Действие этой силы может быть описано как действие поверхностных сил, распределенных по закону

$$\mathbf{P}=\mathbf{F}\delta(x)\,\delta(y),$$

где δ обозначает δ-функцию, а начало координат выбрано в точке приложения силы. Зная решение задачи для сосредоточенной силы, можно непосредственно построить решение для произвольного распределения сил $\mathbf{P}(x, y)$. Именно, если

$$u_i=G_{ik}(x, y, z)F_k \qquad (8,13)$$

есть деформация под действием сосредоточенной силы $\mathbf{F}$, приложенной в начале координат, то деформация под действием сил $\mathbf{P}(x, y)$ дается интегралом [2])

$$u_i=\iint G_{ik}(x-x', y-y', z)P_k(x', y')\,dx'dy'. \qquad (8,14)$$

Из теории потенциала известно, что гармоническая функция f, обращающаяся на бесконечности в нуль и обладающая заданной

---

[1]) Мы не доказываем здесь возможности наложения такого условия, она будет явствовать из того, что в результате мы не придем ни к каким противоречиям.

[2]) Согласно математической терминологии G_{ik} есть тензор Грина для уравнений равновесия полубесконечной среды.

нормальной производной $\partial f/\partial z$ на плоскости $z = 0$, определяется формулой

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\iint \frac{\partial f(x', y', z)}{\partial z}\bigg|_{z=0} \frac{dx'dy'}{r},$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}.$$

Поскольку величины $\partial g_x/\partial z$, $\partial g_y/\partial z$ и величина, стоящая в фигурных скобках в уравнении (8,10), удовлетворяют уравнению Лапласа, а равенства (8,10) и (8,12) как раз определяют значения их нормальных производных на плоскости $z = 0$, имеем

$$f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx'dy' = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_z}{r}, \tag{8,15}$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_x}{r}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_y}{r}, \tag{8,16}$$

где теперь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В выражения для компонент искомого вектора $\mathbf{u}$ входят не самые величины g_x, g_y, а только их производные по x, y, z. Для вычисления $\partial g_x/\partial x$, $\partial g_y/\partial y$ дифференцируем равенства (8,16) соответственно по x и по y:

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial x\,\partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_x x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 g_y}{\partial y\,\partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_y y}{r^3}.$$

Интегрируя теперь по dz в пределах от ∞ до z, получим

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_x x}{r(r+z)}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial y} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_y y}{r(r+z)}. \tag{8,17}$$

Мы не станем производить здесь дальнейших простых, но довольно громоздких вычислений. Из уравнений (8,11), (8,15) и (8,17) определяем f_z и $\partial\psi/\partial z$. Зная $\partial\psi/\partial z$, легко вычислить $\partial\psi/\partial x$, $\partial\psi/\partial y$, интегрируя сначала по z, а затем дифференцируя по x и по y. Так мы получим все величины, нужные для вычисления вектора деформации согласно (8,2), (8,5), (8,7). В результате получим следующие окончательные формулы:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)x}{r(r+z)}\right]F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)}F_x + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]x}{r^3(r+z)^2}(xF_x + yF_y)\right\},\\
u_y &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)y}{r(r+z)}\right]F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)}F_y + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]y}{r^3(r+z)^2}(xF_x + yF_y)\right\},\\
u_z &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{2(1-\sigma)}{r} + \frac{z^2}{r^3}\right]F_z + \left[\frac{1-2\sigma}{r(r+z)} + \frac{z}{r^3}\right](xF_x + yF_y)\right\}.
\end{aligned} \tag{8,18}$$

В частности, смещение точек самой свободной поверхности среды дается формулами, получающимися отсюда при $z = 0$:

$$u_x = \frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{-\frac{(1-2\sigma)x}{r}F_z + 2(1-\sigma)F_x + \frac{2\sigma x}{r^2}(xF_x + yF_y)\right\},$$

$$u_y = \frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{-\frac{(1-2\sigma)y}{r}F_z + 2(1-\sigma)F_y + \frac{2\sigma y}{r^2}(xF_x + yF_y)\right\},$$

$$u_z = \frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{2(1-\sigma)F_z + (1-2\sigma)\frac{1}{r}(xF_x + yF_y)\right\}. \qquad (8,19)$$

Задача

Определить деформацию неограниченной упругой среды, к малому участку которой приложена сила $\mathbf{F}$ (*W. Thomson*, 1848) [1].

Решение. Рассматривая деформацию на расстояниях r, больших по сравнению с размерами участка приложения силы, мы можем считать, что сила приложена в точке. Уравнение равновесия гласит (ср. (7,2)):

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}\mathbf{F}\delta(\mathbf{r}) \qquad (1)$$

(где $\delta(\mathbf{r}) \equiv \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$, а начало координат выбрано в точке приложения силы). Ищем решение в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$, где $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет уравнению типа Пуассона:

$$\Delta\mathbf{u}_0 = -\frac{2(1+\sigma)}{E}\mathbf{F}\delta(\mathbf{r}). \qquad (2)$$

Соответственно для $\mathbf{u}_1$ получим уравнение

$$\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}_1 + (1-2\sigma)\Delta\mathbf{u}_1 = -\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}_0. \qquad (3)$$

Обращающееся на бесконечности в нуль решение уравнения (2) есть

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{\mathbf{F}}{r}.$$

Применив к уравнению (3) операцию rot, получим $\Delta\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 = 0$. На бесконечности должно быть $\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 = 0$. Но функция, гармоническая во всем пространстве и обращающаяся в нуль на бесконечности, равна нулю тождественно. Таким образом, $\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 = 0$ и соответственно этому можно писать $\mathbf{u}_1$ в виде $\mathbf{u}_1 = \operatorname{grad}\varphi$. Из (3) получаем

$$\nabla\{2(1-\sigma)\Delta\varphi + \operatorname{div}\mathbf{u}_0\} = 0.$$

Отсюда следует, что стоящая в скобках величина есть постоянная, и поскольку она должна исчезать на бесконечности, то во всем пространстве

$$\Delta\varphi = -\frac{\operatorname{div}\mathbf{u}_0}{2(1-\sigma)} = -\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)}\mathbf{F}\nabla\frac{1}{r}.$$

Если ψ — решение уравнения $\Delta\psi = 1/r$, то

$$\varphi = -\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)}\mathbf{F}\nabla\psi.$$

---

[1]) Аналогичная задача для произвольной неограниченной анизотропной среды решена *И. М. Лифшицем* и *Л. Н. Розенцвейгом* (ЖЭТФ, 1947, т. 17, с. 783).

Выбрав не имеющее особенностей решение $\psi = r/2$, получим

$$\mathbf{u}_1 = \nabla\varphi = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}\,\frac{(\mathbf{Fn})\,\mathbf{n} - \mathbf{F}}{r},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора $\mathbf{r}$. Окончательно имеем

$$\mathbf{u} = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}\,\frac{(3-4\sigma)\,\mathbf{F} + \mathbf{n}\,(\mathbf{nF})}{r}.$$

Представив эту формулу в виде (8,13), получим тензор Грина уравнений равновесия неограниченной изотропной среды [1]):

$$G_{ik} = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}\,[(3-4\sigma)\,\delta_{ik} + n_i n_k]\,\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1-\sigma)}\,\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\,r\right].$$

§ 9. Соприкосновение твердых тел

Пусть два твердых тела соприкасаются друг с другом в точке, не являющейся особой точкой их поверхностей (на рис. 1, *а* изображен разрез через обе поверхности вблизи точки соприкосновения O). В этой точке обе поверхности имеют общую касательную плоскость, которую мы выберем в качестве плоскости x, y. Положительное же направление оси z условимся считать различным для обоих тел, — для каждого из них будем отсчитывать z-координату по направлению в глубь тела, обозначая ее соответственно как z и z'.

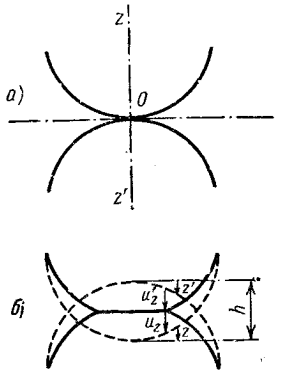

Рис. 1

Как известно, вблизи обыкновенной точки касания координатной плоскости (плоскости x, y) уравнение поверхности может быть написано в виде

$$z = \varkappa_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \tag{9,1}$$

где по дважды повторяющимся индексам α, β подразумевается суммирование по значениям 1, 2 ($x_1 = x$, $x_2 = y$), а $\varkappa_{\alpha\beta}$ есть двухмерный симметрический тензор, характеризующий кривизну поверхности (главные значения тензора $\varkappa_{\alpha\beta}$ равны $1/2R_1$ и $1/2R_2$, где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности в точке

[1]) Тот факт, что компоненты тензора G_{ik} — однородные функции первого порядка от координат x, y, z, заранее очевиден из соображений однородности в связи с видом уравнения (1), в левой стороне которого стоит линейная комбинация вторых производных от компонент вектора $\mathbf{u}$, а в правой — однородная функция третьего порядка ($\delta(a\mathbf{r}) = a^{-3}\delta(\mathbf{r})$). Это свойство остается и в общем случае произвольной анизотропной среды.