

Выбрав не имеющее особенностей решение  $\psi = r/2$ , получим

$$\mathbf{u}_1 = \nabla \Phi = \frac{1 + \sigma}{8\pi E(1 - \sigma)} \frac{(\mathbf{F}\mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{F}}{r},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Окончательно имеем

$$\mathbf{u} = \frac{1 + \sigma}{8\pi E(1 - \sigma)} \frac{(3 - 4\sigma) \mathbf{F} + \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F})}{r}.$$

Представив эту формулу в виде (8,13), получим тензор Грина уравнений равновесия неограниченной изотропной среды<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} G_{ik} &= \frac{1 + \sigma}{8\pi E(1 - \sigma)} [(3 - 4\sigma) \delta_{ik} + n_i n_k] \frac{1}{r} = \\ &= \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1 - \sigma)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} r \right]. \end{aligned}$$

## § 9. Соприкосновение твердых тел

Пусть два твердых тела соприкасаются друг с другом в точке, не являющейся особой точкой их поверхностей (на рис. 1, а изображен разрез через обе поверхности вблизи точки сопри-

косновения  $O$ ). В этой точке обе поверхности имеют общую касательную плоскость, которую мы выберем в качестве плоскости  $x, y$ . Положительное же направление оси  $z$  условимся считать различным для обоих тел, — для каждого из них будем отсчитывать  $z$ -координату по направлению в глубь тела, обозначая ее соответственно как  $z$  и  $z'$ .

Как известно, вблизи обыкновенной точки касания координатной плоскости (плоскости  $x, y$ ) уравнение поверхности может быть написано в виде

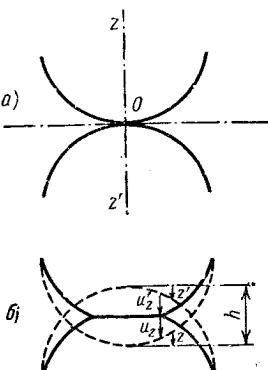


Рис. 1

$$z = \kappa_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (9,1)$$

где по дважды повторяющимся индексам  $\alpha, \beta$  подразумевается суммирование по значениям 1, 2 ( $x_1 = x, x_2 = y$ ), а  $\kappa_{\alpha\beta}$  есть двухмерный симметрический тензор, характеризующий кривизну поверхности (главные значения тензора  $\kappa_{\alpha\beta}$  равны  $1/2R_1$  и  $1/2R_2$ , где  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны поверхности в точке

<sup>1)</sup> Тот факт, что компоненты тензора  $G_{ik}$  — однородные функции первого порядка от координат  $x, y, z$ , заранее очевиден из соображений однородности в связи с видом уравнения (1), в левой стороне которого стоит линейная комбинация вторых производных от компонент вектора  $\mathbf{u}$ , а в правой — однородная функция третьего порядка ( $\delta(\mathbf{ag}) = a^{-3}\delta(\mathbf{r})$ ). Это свойство остается и в общем случае произвольной анизотропной среды.

касания). Аналогичное соотношение для поверхности второго тела вблизи точки соприкосновения напишем в виде

$$z' = \kappa'_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta. \quad (9,2)$$

Предположим теперь, что оба тела сдавливаются приложенными к ним силами, в результате чего они сближаются на некоторое малое расстояние  $h^1$ .

Тогда вблизи точки первоначального соприкосновения на поверхности тел возникает вмятина, и тела будут соприкасаться уже не в одной точке, а по некоторому малому, но конечному участку их поверхности. Пусть  $u_z$  и  $u'_z$  — компоненты (соответственно по осям  $z$  и  $z'$ ) векторов смещения точек поверхностей обоих тел при сдавливании. На рис. 1, б пунктиром изображены поверхности тел, какими они были бы при отсутствии деформации, а сплошной линией — поверхности сдавленных тел; буквы  $z$  и  $z'$  обозначают длины, определяемые равенствами (9,1) и (9,2). Как непосредственно видно из рисунка, во всех точках области соприкосновения имеет место равенство

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) = h,$$

или

$$(\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}) x_\alpha x_\beta + u_z + u'_z = h. \quad (9,3)$$

В точках же вне этой области, где обе поверхности не соприкасаются, имеет место неравенство  $z + z' + u_z + u'_z < h$ .

Выберем направления осей  $x$ ,  $y$  таким образом, чтобы тензор  $\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}$  был приведен к главным осям. Обозначая главные значения этого тензора посредством  $A$  и  $B$ , перепишем равенство (9,3) в виде

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h. \quad (9,4)$$

Величины  $A$  и  $B$  связаны с радиусами кривизны  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R'_1$ ,  $R'_2$  обеих поверхностей следующими формулами, которые приведем без вывода:

$$2(A + B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2},$$

$$4(A - B)^2 = \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + \\ + 2 \cos 2\varphi \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} \right),$$

где  $\varphi$  — угол между теми нормальными сечениями поверхностей, в которых радиусы кривизны —  $R_1$  и  $R'_1$ . Знаки радиусов кри-

<sup>1)</sup> Излагаемая так называемая контактная задача теории упругости была впервые решена Герцем (H. Hertz, 1882).

визны предполагаются положительными, если соответствующие центры кривизны расположены внутри соответствующего тела, и отрицательными — в обратном случае.

Обозначим посредством  $P_z(x, y)$  давление между обоими сдавленными телами в точках их соприкосновения (вне области соприкосновения, разумеется,  $P_z = 0$ ). При определении зависимости между  $P_z$  и смещениями  $u_z$ ,  $u'_z$  можно с достаточной точностью рассматривать поверхности тел как плоские и воспользоваться полученными в предыдущем параграфе формулами. Согласно третьей из формул (8,19) (учитывая также (8,14)) смещение  $u_z$  под влиянием нормальных сил  $P_z(x, y)$  определяется выражениями

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1 - \sigma^2}{\pi E} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy', \\ u'_z &= \frac{1 - \sigma'^2}{\pi E'} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' \end{aligned} \quad (9,5)$$

( $\sigma$ ,  $\sigma'$  и  $E$ ,  $E'$  — коэффициенты Пуассона и модули растяжения обоих тел); поскольку вне области соприкосновения  $P_z = 0$ , то интегрирование производится здесь только по этой области. Заметим, что из этих формул следует, что отношение  $u_z/u'_z$  постоянно и равно

$$\frac{u_z}{u'_z} = \frac{(1 - \sigma^2) E'}{(1 - \sigma'^2) E}. \quad (9,6)$$

Соотношения (9,4) и (9,6) вместе непосредственно определяют распределение деформации  $u_z$ ,  $u'_z$  по области соприкосновения (сами же формулы (9,5) и (9,6) относятся, конечно, и к точкам вне этой области).

Подставив выражения (9,5) в (9,4), получим

$$\frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right) \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = h - Ax^2 - By^2. \quad (9,7)$$

Это интегральное уравнение определяет распределение давления  $P_z$  по области соприкосновения. Его решение может быть найдено из аналогии со следующими известными из теории потенциала соотношениями. На мысль воспользоваться этой аналогией наводит тот факт, что, во-первых, интеграл, стоящий в левой стороне уравнения (9,7), — типа обычных в теории потенциала интегралов, определяющих потенциал, создаваемый некоторым распределением зарядов, и, во-вторых, что потенциал поля внутри равномерно заряженного эллипсоида есть квадратичная функция координат.

Если по объему трехосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

равномерно распределен заряд (с постоянной объемной плотностью  $\rho$ ), то потенциал поля внутри эллипсоида определяется выражением

$$\varphi(x, y, z) =$$

$$= \pi \rho abc \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{V(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}.$$

В предельном случае сильно уплощенного (в направлении оси  $z$ ) эллипсоида, что соответствует  $c \rightarrow 0$ , получим отсюда

$$\varphi(x, y) = \pi \rho abc \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{V(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}$$

(при переходе к пределу  $c \rightarrow 0$  надо, разумеется, положить равной нулю также и координату  $z$  точек внутри эллипсоида). С другой стороны, потенциал  $\varphi(x, y, z)$  может быть написан в виде интеграла

$$\varphi(x, y, z) = \iiint \frac{\rho dx' dy' dz'}{V(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

где интегрирование производится по объему эллипсоида. Переходя здесь к пределу  $c \rightarrow 0$ , мы должны положить под корнем  $z = z' = 0$ ; производя интегрирование по  $dz'$  в пределах между  $\pm c \left( 1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} \right)^{1/2}$ , получим

$$\varphi(x, y) = 2\rho c \int \int \frac{dx' dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} \\ (r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}),$$

где интегрирование производится по площади внутри эллипса  $x'^2/a^2 + y'^2/b^2 = 1$ . Приравнивая оба выражения для  $\varphi(x, y)$ , получим следующее тождество:

$$\int \int \frac{dx' dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} = \\ = \frac{\pi ab}{2} \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{V(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}. \quad (9,8)$$

Сравнивая это соотношение с уравнением (9,7), мы видим, что в их правых частях стоят квадратичные функции от  $x$  и  $y$  одинакового вида, а в левых — интегралы одинакового типа. Поэтому мы можем сразу заключить, что область соприкосновения тел

(т. е. область интегрирования в интеграле в (9,7)) ограничена эллипсом вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9,9)$$

и что функция  $P_z(x, y)$  должна быть вида

$$P_z(x, y) = \text{const} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Выбирая const так, чтобы интеграл  $\iint P_z dx dy$  по области соприкосновения был равен заданной полной силе  $F$ , с которой сдавливаются оба тела, получим

$$P_z(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (9,10)$$

Эта формула определяет закон распределения давления по площади области соприкосновения. Отметим, что давление в центре области в полтора раза превышает среднее давление  $F/\pi ab$ .

Подставив (9,10) в уравнение (9,7) и заменив получающийся в нем интеграл его выражением согласно (9,8), получим

$$\frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} d\xi = h - Ax^2 - By^2,$$

где

$$D = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right).$$

Это равенство должно выполняться тождественно при всех значениях  $x, y$  (внутри эллипса (9,9)); поэтому должны быть попарно равны в отдельности коэффициенты при  $x$  и  $y$  и свободные члены в обеих сторонах. Отсюда находим следующие соотношения:

$$h = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \quad (9,11)$$

$$A = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \quad (9,12)$$

$$B = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2 + \xi)\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}.$$

Уравнения (9,12) определяют полуоси  $a$  и  $b$  области соприкосновения по заданной силе  $F$  ( $A$  и  $B$  — известные для данных тел

величины). После этого соотношение (9,11) определит зависимость между силой  $F$  и вызываемым ею сближением тел  $h$ . Интегралы, стоящие в правых сторонах этих уравнений, эллиптические.

Таким образом, задачу о соприкосновении тел можно считать полностью решенной. Форма поверхности тел (т. е. смещения  $u_x, u_z$ ) вне области соприкосновения определяется теми же формулами (9,5), (9,10), причем значения интегралов можно сразу определить, исходя из аналогии с потенциалом поля заряженного эллипсоида, — на этот раз вне его. Наконец, по формулам предыдущего параграфа можно было бы определить также и распределение деформации по объему тел (но, конечно, лишь на расстояниях, малых по сравнению с размерами тела).

Применим полученные формулы к соприкосновению двух шаров с радиусами  $R$  и  $R'$ . Здесь

$$A = B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right);$$

из соображений симметрии ясно, что будет и  $a = b$ , т. е. область соприкосновения есть круг. Из (9,12) получим для радиуса  $a$  области соприкосновения значение

$$a = F^{1/3} \left( D \frac{RR'}{R + R'} \right)^{1/3}. \quad (9,13)$$

$h$  есть в данном случае разность между суммой  $R + R'$  и расстоянием между центрами шаров. Из (9,10) получим следующее соотношение между  $F$  и  $h$ :

$$h = F^{2/3} \left[ D^2 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]^{1/3}. \quad (9,14)$$

Отметим, что  $h$  пропорционально степени  $F^{2/3}$  сдавливающей силы; обратно, сила  $F$  пропорциональна степени  $h^{3/2}$  производимого ею сближения тел. Напишем еще потенциальную энергию  $U$  соприкасающихся шаров. Замечая, что должно быть  $(-F) = -\partial U / \partial h$ , получим

$$U = h^{6/5} \frac{2}{5D} \left( \frac{RR'}{R + R'} \right)^{1/2}. \quad (9,15)$$

Наконец, укажем, что зависимость вида

$$h = \text{const} \cdot F^{2/3}, \quad F = \text{const} \cdot h^{3/2}$$

имеет место не только для шаров, но и при соприкосновении других тел конечных размеров. В этом легко убедиться из соображений подобия. Если произвести замену  $a^2 \rightarrow \alpha a^2$ ,  $b^2 \rightarrow \alpha b^2$ ,  $F \rightarrow \rightarrow \alpha^{3/2} F$ , где  $\alpha$  — произвольная постоянная, то уравнения (9,12) останутся неизменными. В уравнении же (9,11) правая часть умножится на  $\alpha$ , и для того чтобы оно осталось неизменным, надо заменить  $h$  на  $\alpha h$ . Отсюда и следует, что  $F$  должно быть пропорционально  $h^{3/2}$ .

### Задачи

1. Определить время, в течение которого соприкасаются два сталкивающихся упругих шара.

**Решение.** В системе отсчета, в которой центр инерции обоих шаров покойится, энергия шаров до столкновения равна кинетической энергии относительно движения  $\mu v^2/2$ , где  $v$  — относительная скорость сталкивающихся шаров, а  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  — их приведенная масса. В течение столкновения полная энергия равна сумме кинетической энергии, которую можно написать в виде  $\mu \dot{h}^2/2$ , и потенциальной энергии (9,15). В силу закона сохранения энергии имеем

$$\mu \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + kh^{5/2} = \mu v^2, \quad k = \frac{4}{5D} \left( \frac{RR'}{R+R'} \right)^{1/2}.$$

Максимальное сближение шаров  $h_0$  соответствует моменту, когда их относительная скорость  $\dot{h}$  обращается в нуль, и равно

$$h_0 = \left( \frac{\mu}{k} \right)^{8/5} v^{4/5}.$$

Время  $\tau$ , в течение которого длится столкновение (т. е.  $h$  меняется от 0 до  $h_0$  и обратно до нуля), равно

$$\tau = 2 \int_0^{h_0} \frac{dh}{(v^2 - kh^{5/2}/\mu)^{1/2}} = 2 \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{2/5}}},$$

или

$$\tau = \frac{4 \sqrt{\pi} \Gamma(2/5)}{5 \Gamma(9/10)} \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5} = 2,94 \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5}.$$

Пользуясь при решении этой задачи полученными в тексте статическими формулами, мы тем самым пренебрегаем упругими колебаниями шара, возникающими при столкновении. Возможность такого пренебрежения требует, чтобы скорость  $v$  была достаточно мала по сравнению со скоростью звука. Фактически, однако, применимость этой теории ограничивается еще раньше благодаря тому, что возникающие при столкновении деформации переходят за предел упругости вещества.

2. Определить размеры области соприкосновения и распределение давления в ней при сдавливании двух цилиндров вдоль их образующих.

**Решение.** Область соприкосновения представляет собой в этом случае узкую полоску вдоль длины цилиндров. Ее ширину  $2a$  и распределение давления в ней можно найти из полученных в тексте формул путем предельного перехода  $b/a \rightarrow \infty$ . Распределение давления будет функцией вида

$$P_z(x) = \text{const.} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

( $x$  — координата вдоль ширины полосы соприкосновения); нормируя ее на отнесенную к единице длины цилиндров сдавливающую силу  $F$ , получим

$$P_z(x) = \frac{2F}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Подставляя это выражение в (9,7) и производя интегрирование с помощью (9,8), имеем

$$A = \frac{4DF}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi^2)^{1/2} \xi} = \frac{8DF}{3\pi a^2}.$$

Один из радиусов кривизны цилиндрической поверхности бесконечен, а другой совпадает с радиусом цилиндра; поэтому в данном случае

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right), \quad B = 0.$$

Окончательно находим для искомой ширины полосы соприкосновения:

$$a = \left( \frac{16DF}{3\pi} \frac{RR'}{R+R'} \right)^{1/2}.$$

## § 10. Упругие свойства кристаллов

Изменение свободной энергии при изотермическом сжатии кристалла является, как и у изотропных тел, квадратичной функцией тензора деформации. В противоположность тому, что имело место для изотропных тел, эта функция содержит теперь не два, а большее число независимых коэффициентов.

Общий вид свободной энергии деформированного кристалла есть

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{ijkl} u_{ik} u_{lm}, \quad (10,1)$$

где  $\lambda_{ijkl}$  есть некоторый тензор 4-го ранга, называемый *тензором модулей упругости*. Поскольку тензор деформации симметричен, то произведение  $u_{ik} u_{lm}$  не меняется при перестановке индексов  $i$  с  $k$ ,  $l$  с  $m$  или пары  $i, k$  с парой  $l, m$ . Очевидно поэтому, что и тензор  $\lambda_{ijkl}$  может быть определен так, чтобы он обладал такими же свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов:

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}. \quad (10,2)$$

Путем простого подсчета можно убедиться в том, что число различных компонент тензора 4-го ранга, обладающего такими свойствами симметрии, равно в общем случае 21<sup>1)</sup>.

Соответственно выражению (10,1) для свободной энергии зависимость тензора напряжений от тензора деформации имеет в кристаллах вид (ср. также сноску на стр. 59)

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \lambda_{ijkl} u_{lm}. \quad (10,3)$$

Наличие той или иной симметрии кристалла приводит к появлению зависимостей между различными компонентами тензора  $\lambda_{ijkl}$ , так что число его независимых компонент оказывается меньшим, чем 21.

Рассмотрим эти соотношения для всех возможных типов макроскопической симметрии кристаллов, т. е. для всех кристалли-

<sup>1)</sup> В литературе используются также обозначения, в которых компоненты тензора 4-го ранга записываются как  $\lambda_{\alpha\beta}$  с двумя индексами, пробегающими значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, которым отвечают соответственно пары индексов  $xx$ ,  $yy$ ,  $zz$ ,  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$ .