Один из радиусов кривизны цилиндрической поверхности бесконечен, а другой совпадает с радиусом цилиндра; поэтому в данном случае

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right), \quad B = 0.$$

Окончательно находим для искомой ширины полосы соприкосновения:

$$a = \left(\frac{16DF}{3\pi}\,\frac{RR'}{R+R'}\right)^{1/2}.$$

§ 10. Упругие свойства кристаллов

Изменение свободной энергии при изотермическом сжатии кристалла является, как и у изотропных тел, квадратичной функцией тензора деформации. В противоположность тому, что имело место для изотропных тел, эта функция содержит теперь не два, а большее число независимых коэффициентов.

Общий вид свободной энергии деформированного кристалла есть

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}, \tag{10,1}$$

где λ_{iklm} есть некоторый тензор 4-го ранга, называемый *тензором модулей упругости*. Поскольку тензор деформации симметричен, то произведение $u_{ik}u_{lm}$ не меняется при перестановке индексов i с k, l с m или пары i, k с парой l, m. Очевидно поэтому, что и тензор λ_{iklm} может быть определен так, чтобы он обладал такими же свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов:

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}. \tag{10,2}$$

Путем простого подсчета можно убедиться в том, что число различных компонент тензора 4-го ранга, обладающего такими свойствами симметрии, равно в общем случае 21 [1]).

Соответственно выражению (10,1) для свободной энергии зависимость тензора напряжений от тензора деформации имеет в кристаллах вид (ср. также сноску на стр. 59)

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \lambda_{iklm}u_{lm}. \tag{10,3}$$

Наличие той или иной симметрии кристалла приводит к появлению зависимостей между различными компонентами тензора λ_{iklm}, так что число его независимых компонент оказывается меньшим, чем 21.

Рассмотрим эти соотношения для всех возможных типов макроскопической симметрии кристаллов, т. е. для всех кристалли-

[1]) В литературе используются также обозначения, в которых компоненты тензора 4-го ранга записываются как $\lambda_{\alpha\beta}$ с двумя индексами, пробегающими значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, которым отвечают соответственно пары индексов xx, yy, zz, yz, zx, xy.

ческих классов, распределив их по соответствующим кристаллическим системам (см. V, § 130, 131).

1. Триклинная система. Триклинная симметрия (классы C_1 и C_i) не накладывает никаких ограничений на компоненты тензора λ_{iklm}, а выбор системы координат с точки зрения симметрии вполне произволен. При этом отличны от нуля и независимы все 21 модуль упругости. Произвольность выбора системы координат позволяет, однако, наложить на компоненты тензора λ_{iklm} дополнительные условия. Поскольку ориентация системы координат относительно тела определяется тремя величинами (углами поворота), то таких условий может быть три; можно, например, три из компонент считать равными нулю. Тогда независимыми величинами, характеризующими упругие свойства кристалла, будут 18 отличных от нуля модулей и 3 угла, определяющих ориентацию осей в кристалле.

2. Моноклинная система. Рассмотрим класс C_s; выбираем систему координат с плоскостью x, y, совпадающей с плоскостью симметрии. При отражении в этой плоскости координаты подвергаются преобразованию: $x \to x$, $y \to y$, $z \to -z$. Компоненты тензора преобразуются как произведения соответствующих координат. Поэтому ясно, что при указанном преобразовании все компоненты λ_{iklm}, среди индексов которых индекс z содержится нечетное (1 или 3) число раз, переменят свой знак, а остальные компоненты останутся неизменными. С другой стороны, в силу симметрии кристалла все характеризующие его свойства величины (в том числе и все компоненты λ_{iklm}) должны остаться неизменными при отражении в плоскости симметрии. Поэтому ясно, что все компоненты с нечетным числом индексов z должны быть равными нулю. Соответственно этому общее выражение для свободной упругой энергии кристалла моноклинной системы есть

$$F = {}^1/_2\lambda_{xxxx}u_{xx}^2 + {}^1/_2\lambda_{yyyy}u_{yy}^2 + {}^1/_2\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + \\ + \lambda_{xxzz}u_{xx}u_{zz} + \lambda_{yyzz}u_{yy}u_{zz} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz}u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz}u_{yz}^2 + \\ + 2\lambda_{xxxy}u_{xx}u_{xy} + 2\lambda_{yyyx}u_{yy}u_{yx} + 2\lambda_{xyzz}u_{xy}u_{zz} + 4\lambda_{xzyz}u_{xz}u_{yz}. \qquad (10,4)$$

Здесь стоят 13 независимых коэффициентов. Такое же выражение получается для класса C_2, а также и класса C_{2h}, содержащего оба элемента симметрии (C_2 и σ_h) вместе. В изложенных рассуждениях, однако, соображения симметрии фиксируют выбор направления лишь одной из осей координат (z), направления же осей x, y в перпендикулярной плоскости остаются произвольными. Этим произволом можно воспользоваться для того, чтобы надлежащим выбором осей обратить в нуль одну из компонент, скажем λ_{xyzz}. Тогда 13 величинами, характеризующими упругие свойства кристалла, будут 12 отличных от нуля модулей и один угол, определяющий ориентацию осей в плоскости x, y.

3. Ромбическая система. Во всех классах этой системы (C_{2v}, D_2, D_{2h}) выбор осей координат однозначно диктуется симметрией и для свободной энергии получается выражение одинакового вида. Рассмотрим, например, класс D_{2h} и выберем плоскости координат в трех плоскостях симметрии этого класса. Отражения в каждой из этих плоскостей представляют собой преобразования, при которых одна из координат меняет знак, а две другие не меняются. Очевидно, поэтому, что из всех компонент λ_{iklm} отличными от нуля останутся только те, среди индексов которых каждое из их значений x, y и z встречается четное число раз; все остальные компоненты должны были бы менять знак при отражении в какой-нибудь из плоскостей симметрии. Таким образом, общее выражение для свободной энергии имеет в ромбической системе вид

$$F = {}^1/_2\lambda_{xxxx}u_{xx}^2 + {}^1/_2\lambda_{yyyy}u_{yy}^2 + {}^1/_2\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + \lambda_{xxzz}u_{xx}u_{zz} + \\ + \lambda_{yyzz}u_{yy}u_{zz} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz}u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz}u_{yz}^2. \quad (10,5)$$

Она содержит всего девять модулей упругости.

4. Тетрагональная система. Рассмотрим класс C_{4v}. Выбираем координаты с осью z по оси C_4, а оси x, y — перпендикулярными к двум из вертикальных плоскостей симметрии. Отражения в этих двух плоскостях означают соответственно преобразования $x \to -x$, $y \to y$, $z \to z$ и $x \to x$, $y \to -y$, $z \to z$; в силу этого исчезают все компоненты λ_{iklm} с нечетным числом одинаковых индексов. Далее, поворот на угол $\pi/4$ вокруг оси C_4 представляет собой преобразование $x \to y$, $y \to -x$, $z \to z$. Отсюда вытекают соотношения

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy}, \quad \lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz}, \quad \lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz}$$

Остальные преобразования, входящие в класс C_{4v}, ничего не добавляют к этим условиям. Таким образом, свободная энергия кристаллов тетрагональной системы имеет вид

$$F = {}^1/_2\lambda_{xxxx}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + {}^1/_2\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxzz}(u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10,6)$$

Она содержит шесть модулей упругости.

Такой же результат получится и для других классов тетрагональной системы, в которых естественный выбор осей координат диктуется симметрией (D_{2d}, D_4, D_{4h}). В классах же C_4, S_4, C_{4h} однозначен выбор лишь одной оси (z) — вдоль оси C_4 или S_4. При этом требования симметрии допускают существование (помимо фигурирующих в (10,6)) еще и компонент

$$\lambda_{xxxy} = -\lambda_{yyyx}.$$

Надлежащим выбором направлений осей x, y эти компоненты могут быть обращены в нуль, и тогда F снова приведется к тому же виду (10,6).

5. Ромбоэдрическая система. Рассмотрим класс C_{3v} и выберем систему координат с осью z вдоль оси третьего порядка и осью y, перпендикулярной к одной из вертикальных плоскостей симметрии. Для выяснения ограничений, налагаемых на компоненты тензора λ_{iklm} наличием оси C_3, удобно произвести формальное преобразование, введя комплексные «координаты» ξ, η согласно определению

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy; \tag{10,7}$$

координату же z оставляем без изменений. К этим новым координатам преобразуем также и тензор λ_{iklm}; в его компонентах индексы пробегают теперь значения ξ, η, z. Легко видеть, что при повороте на 120° вокруг оси z новые переменные подвергаются преобразованию

$$\xi \to \xi e^{2\pi i/3}, \quad \eta \to \eta e^{-2\pi i/3}, \quad z \to z.$$

Отличными от нуля могут быть в силу симметрии кристалла только те из компонент λ_{iklm}, которые не меняются при этом преобразовании. Очевидно, что этим свойством обладают те компоненты, среди индексов которых три раза повторяются ξ или η (обращаем внимание на то, что $(e^{2\pi i/3})^3 = e^{2\pi i} = 1$), или индекс ξ содержится столько же раз, сколько η (поскольку $e^{2\pi i/3}e^{-2\pi i/3} = 1$); таковыми являются компоненты

$$\lambda_{zzzz}, \ \lambda_{\xi\eta\xi\eta}, \ \lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \ \lambda_{\xi\eta zz}, \ \lambda_{\xi z\eta z}, \ \lambda_{\xi\xi\xi z}, \ \lambda_{\eta\eta\eta z}.$$

Далее, отражение в плоскости симметрии, перпендикулярной к оси y, есть преобразование $x \to x$, $y \to -y$, $z \to z$, или для величин ξ, η: $\xi \to \eta$, $\eta \to \xi$. Поскольку при этом преобразовании $\lambda_{\xi\xi\xi z}$ переходит в $\lambda_{\eta\eta\eta z}$, то эти две компоненты должны быть равны друг другу. Таким образом, кристаллы ромбоэдрической системы обладают всего шестью модулями упругости. Для того чтобы написать выражение для свободной энергии, надо составить сумму $\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}$, в которой индексы пробегают значения ξ, η, z; поскольку нам надо выразить F через компоненты тензора деформации в координатах x, y, z, то мы должны выразить через них компоненты в «координатах» ξ, η, z. Это легко сделать, воспользовавшись тем, что компоненты тензора u_{ik} преобразуются как произведения соответствующих двух координат. Так, из

$$\xi\xi = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

следует, что

$$u_{\xi\xi} = u_{xx} - u_{yy} + 2iu_{xy}.$$

В результате находим для F следующее выражение:

$$\begin{aligned} F = {}^1/_2\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 &+ 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta}(u_{xx} + u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta}[(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] + \\ &+ 2\lambda_{\xi\eta zz}(u_{xx} + u_{yy})u_{zz} + 4\lambda_{\xi z\eta z}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2) + \\ &+ 4\lambda_{\xi\xi\xi z}[(u_{xx} - u_{yy})u_{xz} - 2u_{xy}u_{yz}]. \end{aligned} \tag{10,8}$$

Оно содержит 6 независимых коэффициентов. Такой же результат получится для классов D_3 и D_{3d}. В классах же C_3 и S_6, в которых выбор осей x, y остается произвольным, требования симметрии допускают также и отличную от нуля разность

$$\lambda_{\xi\xi\xi\xi z} - \lambda_{\eta\eta\eta z}.$$

Она, однако, может быть обращена в нуль надлежащим выбором осей x, y.

6. Гексагональная система. Рассмотрим класс C_6 и выберем систему координат с осью z по оси 6-го порядка. Введем снова координаты (10,7). При повороте на угол $2\pi/6$ вокруг оси z они подвергаются преобразованию

$$\xi \to \xi e^{2\pi i/6}, \quad \eta \to \eta e^{-2\pi i/6}.$$

Отсюда видно, что отличны от нуля только те компоненты λ_{iklm}, среди индексов которых индексы ξ и η встречаются одинаковое число раз. Таковыми являются

$$\lambda_{zzzz}, \ \lambda_{\xi\eta\xi\eta}, \ \lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \ \lambda_{\xi\eta zz}, \ \lambda_{\xi z\eta z}.$$

Другие возможные элементы симметрии гексагональной системы ничего не добавляют к этим ограничениям. Таким образом, имеется всего пять модулей упругости. Свободная энергия имеет вид

$$F = {}^1/_2\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta}(u_{xx}+u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta}[(u_{xx}-u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] + \\ + 2\lambda_{\xi\eta zz}u_{zz}(u_{xx}+u_{yy}) + 4\lambda_{\xi z\eta z}(u_{xz}^2+u_{yz}^2). \quad (10,9)$$

Следует отметить, что деформация в плоскости x, y (деформация с отличными от нуля u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) определяется всего двумя упругими модулями, как и для изотропного тела; другими словами, в плоскости, перпендикулярной к гексагональной оси, упругие свойства гексагонального кристалла изотропны. По этой причине выбор направлений осей в этой плоскости вообще несуществен и никак не отражается на виде F. Выражение (10,9) относится поэтому ко всем классам гексагональной системы.

7. Кубическая система. Направим оси x, y, z по трем осям 4-го порядка кубической системы. Уже наличие тетрагональной симметрии (с осью 4-го порядка вдоль оси z) ограничивало число различных компонент тензора λ_{iklm} следующими шестью:

$$\lambda_{xxxx}, \ \lambda_{zzzz}, \ \lambda_{xxzz}, \ \lambda_{xxyy}, \ \lambda_{xyxy}, \ \lambda_{xzxz}.$$

Повороты на 90° вокруг осей x и y дают соответственно преобразования $x \to x$, $y \to -z$, $z \to y$ и $x \to z$, $y \to y$, $z \to -x$. В силу них из написанных шести компонент делаются равными первая со второй, третья с четвертой и пятая с шестой. Таким образом,

остается всего три различных модуля упругости. Свободная энергия кристаллов кубической системы имеет вид [1])

$$F = {}^1/_2\lambda_{xxxx}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + \lambda_{xxyy}(u_{xx}u_{yy} + u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ + 2\lambda_{xyxy}(u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10,10)$$

Выпишем еще раз число независимых параметров (модулей упругости или углов, определяющих ориентацию осей в кристалле) для классов различных систем:

триклинная	21
моноклинная	13
ромбическая	9
тетрагональная (C_4, S_4, C_{4h})	7
тетрагональная (C_{4v}, D_{2d}, D_4, D_{4h})	6
ромбоэдрическая (C_3, S_6)	7
ромбоэдрическая (C_{3v}, D_3, D_{3d})	6
гексагональная	5
кубическая	3

Минимальное же число отличных от нуля модулей, которого можно добиться надлежащим выбором осей координат, одинаково для всех классов в каждой системе:

триклинная	18
моноклинная	12
ромбическая	9
тетрагональная	6
ромбоэдрическая	6
гексагональная	5
кубическая	3

Все сказанное относится, разумеется, к монокристаллам. Поликристаллические же тела с достаточно малыми размерами входящих в их состав кристаллитов можно рассматривать как изотропные тела (поскольку мы интересуемся деформациями в участках, больших по сравнению с размерами кристаллитов). Как и всякое изотропное тело, поликристалл характеризуется всего двумя модулями упругости. Можно было бы на первый взгляд подумать, что эти модули можно получить из модулей упругости отдельных кристаллитов посредством простого усреднения. В действительности, однако, это не так. Если рассматривать деформацию поликристалла как результат деформации входящих в него кристаллитов, то следовало бы в принципе решить уравнения равновесия для всех этих кристаллитов с учетом соответствующих граничных условий на поверхностях их раздела. Отсюда видно, что связь между упругими свойствами кристалла,

[1]) В кубических классах T и T_d нет осей четвертого порядка. Тот же результат получается, однако, в этих случаях путем рассмотрения осей третьего порядка, повороты вокруг которых переводят друг в друга оси второго порядка — оси x, y, z.

рассматриваемого в целом, и свойствами составляющих его кристаллитов зависит от конкретной формы кристаллитов и от корреляции между их взаимными ориентациями. Поэтому не существует общей зависимости между модулями упругости поликристаллов и монокристалла (того же вещества).

Вычисление модулей изотропного поликристалла по монокристаллическим модулям может быть произведено со значительной точностью лишь в случае слабой анизотропии упругих свойств монокристалла [1]). В первом приближении модули упругости поликристалла можно положить равными просто «изотропной части» упругих модулей монокристалла. Тогда в следующем приближении появляются члены, квадратичные по малой «анизотропной части» этих модулей. Оказывается, что эти поправочные члены не зависят от формы кристаллитов и от корреляции их ориентаций и могут быть вычислены в общем виде [2]).

Наконец, остановимся на тепловом расширении кристаллов. В изотропных телах тепловое расширение происходит одинаково по всем направлениям, так что тензор деформации при свободном тепловом расширении имеет вид (см. § 6)

$$u_{ik} = \frac{1}{3}\alpha(T - T_0)\delta_{ik},$$

где α — коэффициент теплового расширения. В кристаллах же надо писать

$$u_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{3}(T - T_0), \qquad (10,11)$$

где α_{ik} — некоторый тензор второго ранга, симметричный по индексам i, k. Выясним число различных независимых компонент этого тензора в кристаллах разных систем. Для этого проще всего воспользоваться известным из тензорной алгебры обстоятельством, что всякому симметричному тензору второго ранга можно привести в соответствие некоторый, как говорят, тензорный эллипсоид [3]). Из соображений симметрии непосредственно очевидно, что при триклинной, моноклинной и ромбической симметриях эллипсоид является, вообще говоря, трехосным (т. е. длины всех его осей различны). При тетрагональной же, ромбоэдрической и гексагональной симметриях эллипсоид должен являться эллипсоидом вращения (с осью соответственно вдоль осей симметрии C_4, C_3 или C_6). Наконец, кубическая симметрия приводит к вырождению эллипсоида в шар. Но трехосный эллипсоид определяется тремя независимыми величинами (длинами

---

[1]) Так, мерой анизотропии упругих свойств кубического кристалла является разность $\lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy} - 2\lambda_{xyxy}$; если она равна нулю, выражение (10,10) сводится к выражению упругой энергии изотропного тела (4,3).

[2]) См. *И. М. Лифшиц, Л. Н. Розенцвейг.* — ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 967.

[3]) Тензорный эллипсоид определяется уравнением $\alpha_{ik}x_ix_k = 1$.

осей), эллипсоид вращения — двумя, а шар — всего одной (радиусом). Таким образом, число независимых компонент тензора α_{ik} в кристаллах различных систем есть:

триклинная, моноклинная, ромбическая	3
тетрагональная, ромбоэдрическая, гексагональная	2
кубическая	1

Кристаллы первых трех систем называются двухосными, а вторых трех — одноосными. Обратим внимание на то, что тепловое расширение кристаллов кубической системы определяется всего одной величиной, т. е. что они ведут себя в отношении своего теплового расширения как изотропные тела.

Задачи

1. Выразить упругую энергию гексагонального кристалла с помощью упругих модулей λ_{iklm} в координатах x, y, z (ось x — по оси шестого порядка).

Решение. При произвольном (не ортогональном) преобразовании координат надо различать контра- и ковариантные компоненты векторов и тензоров; первые преобразуются как сами координаты x^i (их принято обозначать с верхними индексами), а вторые — как операторы дифференцирования $\partial/\partial x^i$ (их обозначают с нижними индексами). Скаляр (10,1) надо записывать при этом как

$$F = {}^1/_2\lambda_{iklm}u^{ik}u^{lm}.$$

В выражениях (10,8 — 9) компоненты u_{ik} преобразованы как контравариантные; поэтому для установления связи между компонентами λ_{iklm} в координатах ξ, η, z и x, y, z их надо рассматривать как ковариантные (в декартовых координатах те и другие компоненты, разумеется, совпадают). Для преобразования (10,7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right).$$

Преобразуя компоненты λ_{iklm} как произведения этих операторов, найдем

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy} = 4\lambda_{\xi\eta\xi\eta} + 2\lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \quad \lambda_{xyxy} = 2\lambda_{\xi\xi\eta\eta},$$
$$\lambda_{xxyy} = 4\lambda_{\xi\eta\xi\eta} - 2\lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \quad \lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz} = 2\lambda_{\xi\eta zz},$$
$$\lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz} = 2\lambda_{\xi z\eta z}.$$

Свободная энергия (10,9), выраженная через эти модули, имеет вид

$$F = {}^1/_2\lambda_{xxxx}(u_{xx} + u_{yy})^2 + {}^1/_2\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxzz}(u_{xx} + u_{yy})u_{zz} +$$
$$+ 2\lambda_{xzxz}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2) + (\lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy})(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}).$$

2. Найти условия положительности упругой энергии кубического кристалла.

Решение. Первые два члена в (10,10) составляют квадратичную форму трех независимых переменных u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}. Условия положительности этой формы требуют положительности определителя ее коэффициентов, одного из его миноров и коэффициента λ_{xxxx}. Кроме того, должен быть положителен третий член в (10,10). Эти условия приводят к неравенствам

$$\lambda_1 > 0, \ \lambda_3 > 0, \quad -\lambda_1/2 < \lambda_2 < \lambda_1,$$

где обозначено $\lambda_1 = \lambda_{xxxx}$, $\lambda_2 = \lambda_{xxyy}$, $\lambda_3 = \lambda_{xyxy}$.

3. Определить зависимость модуля растяжения кубического кристалла от направления в нем.

Решение. Выбираем оси координат в направлениях ребер куба. Пусть ось вырезанного из кристалла стержня имеет направление единичного вектора **n**. Тензор напряжений в растянутом стержне должен удовлетворять следующим условиям: должно быть $\sigma_{ik}n_k = pn_i$, где p — действующая на единицу площади оснований стержня растягивающая сила (условие на основаниях стержня); для направлений **t**, перпендикулярных **n**, должно быть $\sigma_{ik}t_k = 0$ (условие на боковых сторонах стержня). Такой тензор должен иметь вид $\sigma_{ik} = pn_in_k$. Вычислив компоненты σ_{ik} дифференцированием выражения (10,10) [1]) и сравнив их с выражениями $\sigma_{ik} = pn_in_k$, получим для компонент тензора деформации выражения

$$u_{xx} = p\frac{(\lambda_1 + 2\lambda_2)\,n_x^2 - \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + 2\lambda_2)}, \quad u_{xy} = p\frac{n_xn_y}{2\lambda_3}$$

и аналогичные для остальных компонент.

Относительное продольное удлинение стержня есть $u = (dl' - dl)/dl$, где dl' дается формулой (1,2) и $dx_i/dl = n_i$. Это дает для малых деформаций $u = u_{ik}n_in_k$. Модуль Юнга определяется как коэффициент пропорциональности в $p = Eu$, и для него находим

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)(n_x^2n_y^2 + n_x^2n_z^2 + n_y^2n_z^2).$$

Он имеет экстремальные значения в направлениях ребер (оси x, y, z) и пространственных диагоналей куба. В направлении вдоль ребер куба

$$E = (\lambda_1 + 2\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2).$$

При этом поперечное сжатие стержня $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz} = -\sigma u$, где величина $\sigma = \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ играет роль коэффициента Пуассона. Согласно полученным в предыдущей задаче неравенствам: $-1 < \sigma < 1/2$.

---

[1]) Если вычислять σ_{ik} не непосредственно по формулам $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}u_{lm}$, а путем дифференцирования конкретного выражения F, то производные по u_{ik} с $i \neq k$ дают удвоенные значения σ_{ik}. Это связано с тем, что формула $\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik}$ имеет по существу смысл лишь как выражающая тот факт, что $dF = \sigma_{ik}\,du_{ik}$; но в сумму $\sigma_{ik}\,du_{ik}$ члены с дифференциалами du_{ik} каждой из компонент с $i \neq k$ симметричного тензора u_{ik} входят дважды.