ГЛАВА II

РАВНОВЕСИЕ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИНОК

§ 11. Энергия изогнутой пластинки

В этой главе мы будем заниматься изучением некоторых частных случаев равновесия деформируемых тел и начнем с рассмотрения деформаций тонких пластинок. Когда мы говорим, что пластинка является тонкой, то подразумевается, что ее толщина мала по сравнению с размерами в двух других направлениях. Самые деформации по-прежнему считаются малыми. В данном случае критерием малости деформации является малость смещений точек пластинки по сравнению с ее толщиной.

При применении к тонким пластинкам общие уравнения равновесия значительно упрощаются. Удобнее, однако, выводить эти упрощенные уравнения не непосредственно из общих, а вычислив заново свободную энергию изогнутой пластинки и затем проварьировав эту энергию.

При сгибании пластинки в некоторых местах внутри нее возникают растяжения, а в других — сжатия. Именно, на выпуклой стороне пластинки, очевидно, происходит растяжение; по мере углубления в толщу пластинки это растяжение постепенно уменьшается, достигая в конце концов нуля, вслед за чем в дальнейших слоях начинается постепенно увеличивающееся сжатие. Таким образом, внутри пластинки имеется *нейтральная поверхность*, на которой растяжение вообще отсутствует, а по двум сторонам ее деформация имеет противоположный знак. Очевидно, что эта поверхность расположена по середине толщины пластинки.

Выберем систему координат с началом в какой-нибудь точке нейтральной поверхности и осью z, направленной по нормали к ней. Плоскость x, y совпадает с плоскостью недеформированной пластинки. Обозначим вертикальное смещение точек нейтральной поверхности, т. е. их z-координату, посредством ζ (рис. 2). Что касается компонент смещений этих точек в плоскости x, y, то они являются, очевидно, величинами второго порядка малости по сравнению с ζ и потому могут быть положены равными нулю. Таким образом, вектор смещения точек нейтральной поверхности:

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0, \quad u_z^{(0)} = \zeta(x, y). \tag{11,1}$$

Для дальнейших вычислений необходимо сделать следующее замечание относительно напряжений, действующих в деформиро-

ванной пластинке. Поскольку пластинка тонкая, то, для того чтобы изогнуть ее, требуется приложить к ее поверхности сравнительно небольшие силы. Эти силы во всяком случае будут значительно меньше, чем те внутренние напряжения, которые возникают внутри деформированной пластинки благодаря имеющим в ней место растяжениям и сжатиям. Поэтому в граничных условиях (2,9) можно пренебречь силами P_i, так что остается $\sigma_{ik}n_k = 0$. Поскольку пластинка слабо изогнута, то можно считать, что вектор нормали $\mathbf{n}$ направлен по оси z. Таким образом, на обеих поверхностях пластинки должно быть

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

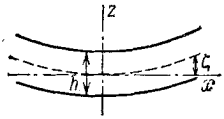

Рис. 2

Но поскольку толщина пластинки мала, то из равенства этих величин нулю на двух сторонах пластинки следует, что они малы и внутри нее. Таким образом, мы приходим к выводу, что во всей пластинке компоненты σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz} малы по сравнению с остальными компонентами тензора напряжений. На этом основании мы можем положить их равными нулю и определить компоненты тензора деформации из этого условия.

Согласно общим формулам (5,13) имеем

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{1+\sigma} u_{zx}, \quad \sigma_{zy} = \frac{E}{1+\sigma} u_{zy},$$
$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{zz} + \sigma (u_{xx} + u_{yy})]. \tag{11,2}$$

Приравнивая эти выражения нулю, находим

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}(u_{xx} + u_{yy}).$$

В первые два уравнения можно для u_z с достаточной точностью подставить $\zeta(x, y)$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

откуда

$$u_x = -z\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad u_y = -z\frac{\partial \zeta}{\partial y}. \tag{11,3}$$

Постоянные интегрирования положены равными нулю так, чтобы при $z = 0$ имело место $u_x = u_y = 0$. Зная u_x и u_y, можно определить все компоненты тензора деформации:

$$u_{xx} = -z\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = -z\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \quad u_{xy} = -z\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y},$$
$$u_{xz} = u_{yz} = 0, \quad u_{zz} = z\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)\frac{\sigma}{1-\sigma}. \tag{11,4}$$

Теперь уже можно вычислить, воспользовавшись общей формулой (5,10), свободную энергию F единицы объема пластинки. Простое вычисление приводит к выражению

$$F = z^2 \frac{E}{1+\sigma}\left\{\frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\}. \tag{11,5}$$

Полная свободная энергия пластинки получится отсюда интегрированием по всему ее объему. Интегрирование по z производится в пределах от $-h/2$ до $+h/2$, где h — толщина пластинки, а по x, y — по всей поверхности пластинки. В результате находим полную свободную энергию $F_{\text{пл}} = \int F\,dV$ деформированной пластинки в виде

$$F_{\text{пл}} = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\}dx\,dy \tag{11,6}$$

(для элемента поверхности можно ввиду малости деформации писать с достаточной точностью просто $dx\,dy$).

После того как получено выражение для свободной энергии, можно рассматривать пластинку как не обладающую толщиной, т. е. как геометрическую поверхность, поскольку нас интересует только форма, принимаемая ею под влиянием приложенных сил, а не распределение деформаций внутри самой пластинки. Величина ζ является тогда смещением точек пластинки, рассматриваемой как поверхность, при ее изгибании.

§ 12. Уравнение равновесия пластинки

Уравнение равновесия пластинки мы выведем из условия минимума ее свободной энергии. Для этого надо вычислить вариацию выражения (11,6).

Разобьем стоящий в (11,6) интеграл на сумму двух интегралов и будем варьировать каждый из них в отдельности. Первый интеграл можно написать в виде

$$\int(\Delta\zeta)^2\,df,$$

где $df = dx\,dy$ — элемент поверхности, а $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ обозначает здесь (и везде в §§ 12—14) двухмерный оператор Лапласа. Варьируя этот интеграл, имеем

$$\delta\frac{1}{2}\int(\Delta\zeta)^2\,df = \int\Delta\zeta\,\Delta\delta\zeta\,df = \int\Delta\zeta\,\operatorname{div}\operatorname{grad}\delta\zeta\,df =$$
$$= \int\operatorname{div}(\Delta\zeta\,\nabla\delta\zeta)\,df - \int\nabla\delta\zeta\,\nabla\Delta\zeta\,df.$$