Теперь уже можно вычислить, воспользовавшись общей формулой (5,10), свободную энергию F единицы объема пластинки. Простое вычисление приводит к выражению

$$F = z^2 \frac{E}{1+\sigma}\left\{\frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\}. \tag{11,5}$$

Полная свободная энергия пластинки получится отсюда интегрированием по всему ее объему. Интегрирование по z производится в пределах от $-h/2$ до $+h/2$, где h — толщина пластинки, а по x, y — по всей поверхности пластинки. В результате находим полную свободную энергию $F_{\text{пл}} = \int F\,dV$ деформированной пластинки в виде

$$F_{\text{пл}} = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\}dx\,dy \tag{11,6}$$

(для элемента поверхности можно ввиду малости деформации писать с достаточной точностью просто $dx\,dy$).

После того как получено выражение для свободной энергии, можно рассматривать пластинку как не обладающую толщиной, т. е. как геометрическую поверхность, поскольку нас интересует только форма, принимаемая ею под влиянием приложенных сил, а не распределение деформаций внутри самой пластинки. Величина ζ является тогда смещением точек пластинки, рассматриваемой как поверхность, при ее изгибании.

§ 12. Уравнение равновесия пластинки

Уравнение равновесия пластинки мы выведем из условия минимума ее свободной энергии. Для этого надо вычислить вариацию выражения (11,6).

Разобьем стоящий в (11,6) интеграл на сумму двух интегралов и будем варьировать каждый из них в отдельности. Первый интеграл можно написать в виде

$$\int(\Delta\zeta)^2\,df,$$

где $df = dx\,dy$ — элемент поверхности, а $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ обозначает здесь (и везде в §§ 12—14) двухмерный оператор Лапласа. Варьируя этот интеграл, имеем

$$\delta\frac{1}{2}\int(\Delta\zeta)^2\,df = \int\Delta\zeta\,\Delta\delta\zeta\,df = \int\Delta\zeta\,\operatorname{div}\operatorname{grad}\delta\zeta\,df =$$
$$= \int\operatorname{div}(\Delta\zeta\,\nabla\delta\zeta)\,df - \int\nabla\delta\zeta\,\nabla\Delta\zeta\,df.$$

Все векторные операции производятся здесь, конечно, в двухмерной системе координат x, y. Первый интеграл справа преобразуем в интеграл по замкнутому контуру, охватывающему пластинку [1]):

$$\int \operatorname{div}(\Delta\zeta\,\nabla\delta\zeta)\,df = \oint \Delta\zeta\,(\mathbf{n}\operatorname{grad}\delta\zeta)\,dl = \oint \Delta\zeta\,\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\,dl,$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали к контуру.

Во втором интеграле применяем такое же преобразование и получаем

$$\int \nabla\delta\zeta\,\nabla\Delta\zeta\,df = \int \nabla(\delta\zeta\,\nabla\Delta\zeta)\,df - \int \delta\zeta\Delta^2\zeta\,df =$$

$$= \oint \delta\zeta(\mathbf{n}\nabla)\,\Delta\zeta\,dl - \int \delta\zeta\Delta^2\zeta\,df = \oint \delta\zeta\,\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n}\,dl - \int \delta\zeta\Delta^2\zeta\,df.$$

Подставляя полученные результаты, получаем

$$\delta\,\frac{1}{2}\int(\Delta\zeta)^2\,df = \int \delta\zeta\Delta^2\zeta\,df - \oint \delta\zeta\,\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n}\,dl + \oint \Delta\zeta\,\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\,dl. \qquad (12,1)$$

Преобразование вариации второго интеграла в (11,6) несколько более длинно. Это преобразование удобнее производить не в векторном виде, а в компонентах. Имеем:

$$\delta\int\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}df =$$

$$= \int\left\{2\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}df.$$

Подынтегральное выражение здесь можно написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right),$$

т. е. как двухмерную дивергенцию некоторого вектора. Поэтому можно переписать вариацию в виде интеграла по контуру:

$$\delta\int\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}df = \oint dl\sin\theta\left\{\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right\} +$$

$$+ \oint dl\cos\theta\left\{\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}, \qquad (12,2)$$

---

[1]) Формула преобразования двухмерных интегралов в точности аналогична трехмерной формуле. Роль элемента объема dV играет теперь элемент поверхности df (рассматриваемый как скаляр), а вместо элемента поверхности $d\mathbf{f}$ стоит элемент длины контура dl, умноженный на вектор $\mathbf{n}$ внешней нормали к контуру. Преобразование интеграла по df в интеграл по dl осуществляется заменой оператора $d\mathbf{f}\,\partial/\partial x_i$ на величину $n_i\,dl$. Так, если φ есть некоторый скаляр, то

$$\int \nabla\varphi\,df = \oint \varphi\mathbf{n}\,dl.$$

где θ — угол между осью x и нормалью $\mathbf{n}$ к контуру (рис. 3).

Производные от $\delta\zeta$ по x и y выразим через производные по направлению нормали $\mathbf{n}$ к контуру и по направлению касательной $\mathbf{l}$ к нему согласно формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial n} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial l},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial n} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial l}.$$

Тогда интегралы в формуле (12,2) приобретают следующий вид:

$$\delta \int \left\{ \cdots \right\} df = \oint dl \frac{\partial \delta\zeta}{\partial n} \left\{ 2 \sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \right.$$
$$\left. - \sin^2\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} + \oint dl \frac{\partial \delta\zeta}{\partial l} \left\{ \sin\theta \cos\theta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + \right.$$
$$\left. + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}.$$

Второй интеграл можно вычислить, взяв его по частям. Поскольку он берется по замкнутому контуру, то пределы интегрирования сливаются в одну точку, и потому мы получаем просто

$$- \oint dl\, \delta\zeta \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \sin\theta \cos\theta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + \right.$$
$$\left. + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}.$$

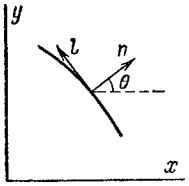

Рис. 3

Сводя все полученные выражения вместе и написав перед ними коэффициенты согласно формуле (11,6), получаем окончательно следующее выражение для вариации свободной энергии:

$$\delta F_{\text{пл}} = D \left\{ \int \Delta^2 \zeta\, \delta\zeta\, df - \oint \delta\zeta\, dl \left[\frac{\partial \Delta\zeta}{\partial n} + \right.\right.$$
$$\left. + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left(\sin\theta \cos\theta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) \right] +$$
$$+ \oint \frac{\partial \delta\zeta}{\partial n} dl \left[\Delta\zeta + (1-\sigma) \left(2 \sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \sin^2\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right] \right\}, \qquad (12,3)$$

где

$$D = Eh^3/12(1-\sigma^2). \qquad (12,4)$$

Для того чтобы получить отсюда уравнение равновесия пластинки, надо приравнять нулю сумму вариации δF и вариации δU потенциальной энергии пластинки, связанной с наличием дей-

ствующих на нее внешних сил. Эта последняя вариация равна взятой с обратным знаком работе внешних сил при смещении пластинки. Пусть P есть действующая на пластинку внешняя сила, отнесенная к единице площади ее поверхности [1]) и направленная по нормали к ней. Тогда работа, произведенная силами при смещении точек пластинки на $\delta\zeta$, равна

$$\int P\,\delta\zeta\,df.$$

Таким образом, имеем в качестве условия минимальности полной свободной энергии пластинки уравнение

$$\delta F_{\text{пл}} - \int P\,\delta\zeta\,df = 0.$$

В левой части этого равенства стоят как интегралы по поверхности, так и интегралы по контуру. Поверхностный интеграл есть

$$\int \{D\,\Delta^2\zeta - P\}\,\delta\zeta\,df.$$

Вариация $\delta\zeta$ в нем произвольна. Поэтому интеграл равен нулю, если

$$D\,\Delta^2\zeta = P. \tag{12,5}$$

Это — уравнение равновесия пластинки, изгибаемой действующими на нее внешними силами. Коэффициент в этом уравнении называют *жесткостью* пластинки при изгибе или *цилиндрической жесткостью*.

Граничные условия для этого уравнения получаются из равенства нулю контурных интегралов в (12,3). При этом следует рассмотреть несколько различных частных случаев.

Предположим, что часть края пластинки свободна, т. е. на нее не действуют никакие внешние силы. Тогда вариации $\delta\zeta$ и $\delta\,(\partial\zeta/\partial n)$ на ней произвольны и должны быть равными нулю коэффициенты при этих вариациях в интегралах по контуру. Это приводит к уравнениям

$$-\frac{\partial\,\Delta\zeta}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left\{\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \right.$$
$$\left. + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right\} = 0, \tag{12,6}$$

$$\Delta\zeta + (1-\sigma)\left\{2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\} = 0. \tag{12,7}$$

Они должны выполняться на всей свободной границе пластинки.

Краевые условия (12,6—7) весьма сложны. Значительно более просты случаи, когда края пластинки *заделаны* или *оперты*. Если

[1]) Сила P может являться здесь результатом действия объемных сил (например, силы тяжести) и равна тогда интегралу от последней по толщине пластинки.

края пластинки заделаны (рис. 4, *а*), то они не могут испытывать никакого вертикального смещения и, сверх того, не может измениться также и направление этих краев. Угол, на который поворачивается данный участок края пластинки относительно своего первоначального положения, равен (при малых смещениях ζ) производной $\partial\zeta/\partial n$. Таким образом, на заделанных краях пластинки вариации $\delta\zeta$ и $\delta(\partial\zeta/\partial n)$ равны нулю, так что контурные интегралы в (12,3) исчезают тождественно. Граничные условия имеют в этом случае простой вид:

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0. \tag{12,8}$$

Первое выражает собой тот факт, что края пластинки вообще не испытывают вертикального смещения при деформации, а второе — что направление края остается горизонтальным.

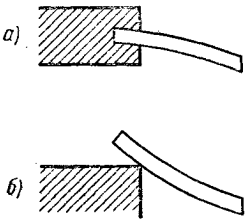

Рис. 4

Легко определить силы реакции, действующие на пластинку со стороны опоры в точках закрепления. Эти силы равны и противоположны силам, действующим на опору со стороны пластинки. Как известно из механики, сила, действующая в некотором направлении, равна производной от энергии по координатам, взятой по этому направлению. В частности, сила, с которой пластинка действует на опору, определяется производной от энергии по смещению ζ края пластинки, взятой с обратным знаком, а обратная сила реакции — той же производной с положительным знаком. Но эта производная есть не что иное, как коэффициент при $\delta\zeta$ во втором интеграле в (12,3). Таким образом, сила реакции, отнесенная к единице длины контура, равна выражению, стоящему в левой части уравнения (12,6) (конечно, не равному теперь нулю), умноженному на D. Аналогично, момент сил реакции определяется выражением, стоящим в левой части уравнения (12,7), умноженным на тот же коэффициент D. Это следует из известного из механики обстоятельства, что момент силы равен производной от энергии по углу поворота тела. Угол же поворота края пластинки равен производной $\partial\zeta/\partial n$, так что соответствующий момент сил определяется коэффициентом при $\delta(\partial\zeta/\partial n)$ в третьем интеграле в (12,3). При этом оба эти выражения (для силы и момента) ввиду условий (12,8) сильно упрощаются. Именно, поскольку ζ и $\partial\zeta/\partial n$ равны нулю вдоль всего контура края пластинки, то обращаются тождественно в нуль также и их производные всех порядков по направлению касательной $\mathbf{l}$. Учитывая это обстоятельство и переходя в (12,6) и (12,7) от производных по x и y к производным в направлениях $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}$, получим следующие

простые выражения для силы F и момента M реакции опоры:

$$F = -D\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial n^3} + \frac{d\theta}{dl}\frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2}\right], \tag{12,9}$$

$$M = D\frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2}. \tag{12,10}$$

Другой важный случай — опертая пластинка (рис. 4, *б*), у которой края только опираются на неподвижную опору, но не закреплены в ней. В таком случае на контуре пластинки (т. е. на линии, по которой пластинка опирается на опору) вертикальное смещение по-прежнему отсутствует, но направление отнюдь не остается неизменным. Соответственно этому в (12,3) в интеграле по контуру

$$\delta\zeta = 0,$$

но

$$\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial n} \neq 0.$$

Поэтому из двух условий (12,6), (12,7) остается только второе. Выражение же, стоящее в левой части (12,6), определяет, как и в предыдущем случае, силу реакции, действующую в точках опоры пластинки (момент же этих сил равен теперь в равновесии нулю). Граничное условие (12,7) упрощается, если перейти к производным по направлениям **n** и **l**, причем учесть, что в силу равенства $\zeta = 0$ на всем контуре обращаются в нуль также и производные $\partial\zeta/\partial l$ и $\partial^2\zeta/\partial l^2$. В результате получим граничные условия в виде

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2} + \sigma\frac{d\theta}{dl}\frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0. \tag{12,11}$$

Задачи

1. Определить деформацию круглой пластинки (радиуса R) с заделанными краями, расположенной горизонтально в поле тяжести.

Решение. Выбираем полярные координаты с началом в центре пластинки. Сила, действующая на единицу площади поверхности пластинки, равна $P = \rho hg$. Уравнение (12,5) приобретает вид

$$\Delta^2\zeta = 64\beta, \quad \beta = 3\rho g(1-\sigma^2)/16h^2E$$

(положительные ζ соответствуют смещению по направлению действия силы тяжести). Поскольку ζ есть функция только от r, то для Δ в полярных координатах надо писать $\Delta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$. Общий интеграл этого уравнения есть

$$\zeta = \beta r^4 + ar^2 + b + cr^2\ln\frac{r}{R} + d\ln\frac{r}{R}.$$

В данном случае надо положить $d = 0$, так как $\ln\frac{r}{R}$ обращается при $r = 0$ в бесконечность, а также $c = 0$, так как этот член приводит к особой точке у $\Delta\zeta$ при $r = 0$ (это соответствовало бы силе, приложенной к центру пластинки, —

см. задачу 3). Постоянные a и b определяются из граничных условий $\zeta = 0$, $\frac{d\zeta}{dr} = 0$ при $r = R$. В результате находим

$$\zeta = \beta(R^2 - r^2)^2.$$

2. То же для пластинки с опертыми краями.

Решение. Граничные условия (12,11) в случае круглой пластинки приобретают вид

$$\zeta = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

Решение аналогично решению задачи 1 и приводит к результату

$$\zeta = \beta(R^2 - r^2)\left(\frac{5+\sigma}{1+\sigma}R^2 - r^2\right).$$

3. Определить деформацию круглой пластинки с заделанными краями, к центру которой приложена сила f.

Решение. Везде, кроме начала координат, имеет место уравнение

$$\Delta^2\zeta = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\zeta = ar^2 + b + cr^2 \ln\frac{r}{R}$$

(член с $\ln r$ опять опускаем). Полная сила, действующая на пластинку, равна силе f, приложенной к ее центру; поэтому интеграл от $\Delta^2\zeta$ по поверхности пластинки должен быть равен

$$2\pi\int_0^R r\,\Delta^2\zeta\,dr = \frac{f}{D}.$$

Отсюда получается $c = f/8\pi D$. Постоянные a и b определяются из граничных условий, и в результате находим

$$\zeta = \frac{f}{8\pi D}\left[\frac{1}{2}(R^2 - r^2) - r^2\ln\frac{R}{r}\right].$$

4. То же для пластинки с опертыми краями.

Решение.

$$\zeta = \frac{f}{16\pi D}\left[\frac{3+\sigma}{1+\sigma}(R^2 - r^2) - 2r^2\ln\frac{R}{r}\right].$$

5. Определить деформацию круглой пластинки, подвешенной в своем центре и находящейся в поле тяжести.

Решение. Уравнение для ζ и его общее решение — такие же, как в задаче 1. Поскольку в центре смещение $\zeta = 0$, то $c = 0$. Постоянные a, b определяются из граничных условий (12,6) и (12,7), имеющих при круговой симметрии вид

$$\frac{d\,\Delta\zeta}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr}\right) = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

В результате находим

$$\zeta = \beta r^2\left[r^2 + 8R^2\ln\frac{R}{r} + 2R^2\frac{3+\sigma}{1+\sigma}\right].$$

6. От тела отрывается тонкий слой (толщиной h) приложенными к нему внешними силами, действующими против сил поверхностного натяжения на поверхности отрыва. При заданных внешних силах устанавливается равновесие с определенными величиной поверхности отрыва и формой отрываемой пластинки (рис. 5). Вывести формулу, связывающую величину поверхностного натяжения с формой отрываемой пластинки.

Решение. Отрываемый слой рассматриваем как пластинку, один из краев которой (линия отрыва) заделан. Изгибающий момент, действующий у этого края, определяется формулой (12,10); работа, производимая этим моментом при удлинении области отрыва на δx, равна

$$M\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x} = M\,\delta x\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = D\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2\delta x \qquad (1)$$

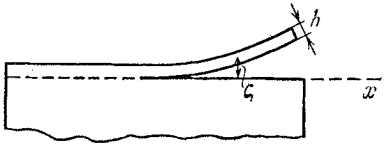

Рис. 5

(работа же изгибающей силы F является малой величиной второго порядка). Условие равновесия состоит в равенстве этой работы изменению энергии системы. Последнее складывается из двух частей: изменения поверхностной энергии и изменения упругой энергии отрываемой пластинки за счет удлинения ее изогнутой части. Первая равна $2\alpha\delta x$, где α — коэффициент поверхностного натяжения, а множитель 2 учитывает возникновение при отрыве двух свободных поверхностей. Вторая же часть равна

$$[Eh^3/24\,(1-\sigma^2)]\,(\partial^2\zeta/\partial x^2)^2\,\delta x$$

(энергия (11,6), приходящаяся на длину δx пластинки), т. е. составляет половину работы (1). Таким образом, получим

$$\alpha = \frac{D}{4}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2.$$

§ 13. Продольные деформации пластинок

Особым видом деформаций тонких пластинок являются продольные деформации, происходящие в самой плоскости пластинки и не сопровождающиеся ее изгибом. Выведем уравнения равновесия, описывающие такие деформации.

Если пластинка достаточно тонка, то деформацию можно считать однородной по ее толщине. Тензор деформации является при этом функцией только от x и y (плоскость x, y выбрана в плоскости пластинки) и не зависит от z. Продольные деформации пластинки вызываются обычно либо силами, приложенными к ее краям, либо действующими в плоскости пластинки объемными силами. Граничные условия на обеих поверхностях пластинки гласят при этом: $\sigma_{ik}n_k = 0$, или, поскольку вектор нормали направлен по оси z: $\sigma_{iz} = 0$, т. е.

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Следует, однако, заметить, что в излагаемой ниже приближенной теории эти условия остаются в силе и в том случае, когда растя-