

6. От тела отрывается тонкий слой (толщиной h) приложенными к нему внешними силами, действующими против сил поверхностного натяжения на поверхности отрыва. При заданных внешних силах устанавливается равновесие с определенными величиной поверхности отрыва и формой отрываемой пластиинки (рис. 5). Вывести формулу, связывающую величину поверхностного натяжения с формой отрываемой пластиинки.

Решение. Отрываемый слой рассматриваем как пластиинку, один из краев которой (линия отрыва) заделан. Изгибающий момент, действующий у этого края, определяется формулой (12,10); работа, производимая этим моментом при удлинении области отрыва на δx , равна

$$M \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} = M \delta x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = D \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 \delta x \quad (1)$$

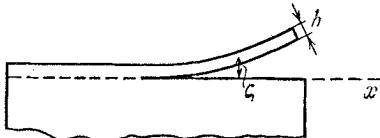


Рис. 5

(работа же изгибающей силы F является малой величиной второго порядка).

Условие равновесия состоит в равенстве этой работы изменению энергии системы. Последнее складывается из двух частей: изменения поверхностной энергии и изменения упругой энергии отрываемой пластиинки за счет удлинения ее изогнутой части. Первая равна $2\alpha \delta x$, где α — коэффициент поверхностного натяжения, а множитель 2 учитывает возникновение при отрыве двух свободных поверхностей. Вторая же часть равна

$$[Eh^3/24(1-\sigma^2)](\partial^2 \zeta / \partial x^2)^2 \delta x$$

(энергия (11,6), приходящаяся на длину δx пластиинки), т. е. составляет половину работы (1). Таким образом, получим

$$\alpha = \frac{D}{4} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2.$$

§ 13. Продольные деформации пластиинок

Особым видом деформаций тонких пластиинок являются продольные деформации, происходящие в самой плоскости пластиинки и не сопровождающие ее изгибом. Выведем уравнения равновесия, описывающие такие деформации.

Если пластиинка достаточно тонка, то деформацию можно считать однородной по ее толщине. Тензор деформации является при этом функцией только от x и y (плоскость x, y выбрана в плоскости пластиинки) и не зависит от z . Продольные деформации пластиинки вызываются обычно либо силами, приложенными к ее краям, либо действующими в плоскости пластиинки объемными силами. Границные условия на обеих поверхностях пластиинки гласят при этом: $\sigma_{iz} n_k = 0$, или, поскольку вектор нормали направлен по оси z : $\sigma_{iz} = 0$, т. е.

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Следует, однако, заметить, что в излагаемой ниже приближенной теории эти условия остаются в силе и в том случае, когда растя-

гливающие внешние силы приложены непосредственно к поверхностям пластинки, так как эти силы все равно будут малыми по сравнению с возникающими в пластинке продольными внутренними напряжениями (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy}). Будучи равными нулю на границах, величины σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} будут малыми и на всем протяжении малой толщины пластинки, в силу чего мы можем приближенно считать их равными нулю во всем объеме пластинки.

Приравнивая нуль выражения (11,2), получим следующие соотношения:

$$\sigma_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}(u_{xx} + u_{yy}), \quad u_{xz} = u_{yz} = 0. \quad (13,1)$$

Подставив их в общие формулы (5,13), получаем отличные от нуля компоненты тензора напряжений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\sigma^2}(u_{xx} + \sigma u_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\sigma^2}(u_{yy} + \sigma u_{xx}), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{xy}. \end{aligned} \quad (13,2)$$

Следует обратить внимание на то, что путем формальной замены

$$E \rightarrow \frac{E}{1-\sigma^2}, \quad \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{1-\sigma} \quad (13,3)$$

эти выражения переходят в формулы, определяющие связь между напряжениями σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} и деформациями u_{xx} , u_{yy} , u_{zz} при плоской деформации (формулы (5,13) с $u_{zz} = 0$).

После того как мы таким образом исключили вовсе смещение u_z , мы можем рассматривать пластинку просто как некоторую двухмерную среду (*упругая плоскость*), не обладающую толщиной, и говорить о векторе деформации u как о двухмерном векторе с двумя компонентами u_x и u_y . Если P_x , P_y — компоненты внешней объемной силы, отнесенной к единице площади пластинки, то общие уравнения равновесия гласят:

$$h \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) + P_x = 0, \quad h \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) + P_y = 0.$$

Подставляя сюда выражения (13,2), получаем уравнения равновесия в виде

$$Eh \left[\frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right] + P_x = 0, \quad (13,4)$$

$$Eh \left[\frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right] + P_y = 0.$$

Эти уравнения могут быть написаны в двухмерном векторном виде

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = -\mathbf{P} \frac{1-\sigma^2}{Eh}, \quad (13,5)$$

где все векторные операции понимаются как двухмерные.

В частности, в отсутствие объемных сил уравнение равновесия гласит:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0. \quad (13,6)$$

Оно отличается лишь значением коэффициента (в соответствии с (13,3)) от уравнения равновесия для плоской деформации неограниченного вдоль оси z тела (§ 7)¹). Так же как и для плоской деформации, можно ввести здесь *функцию напряжения*, определенную соотношениями

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (13,7)$$

автоматически удовлетворяющими уравнениям равновесия, написанным в виде

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0.$$

Функция напряжений по-прежнему удовлетворяет бигармоническому уравнению, так как для $\Delta \chi$ имеем соотношение

$$\Delta \chi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}) = \frac{E}{1-\sigma} \operatorname{div} \mathbf{u},$$

отличающееся лишь множителем от того, что мы имели для плоской деформации.

Отметим здесь следующее обстоятельство: распределение напряжений в пластинке, деформируемой приложенными к ее краям заданными силами, не зависит от упругих постоянных вещества пластиинки. Действительно, эти постоянные не входят ни в бигармоническое уравнение, которому удовлетворяет функция напряжений, ни в формулы (13,7), определяющие компоненты σ_{ik} по этой функции (а потому и в граничные условия на краях пластиинки).

Задачи

1. Определить деформацию плоского диска, равномерно вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости.

Решение. Искомое решение отличается лишь значениями постоянных коэффициентов от полученного в задаче 5 § 7 решения для плоской деформации

¹) Однородную вдоль оси z деформацию, при которой во всем теле $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$, иногда называют *плоским напряженным состоянием* в отличие от плоской деформации, при которой во всем теле $u_{zx} = u_{zy} = u_{zz} = 0$.

вращающегося цилиндра. Радиальное смещение $u_r = u(r)$ дается формулой

$$u = \frac{\rho \Omega^2 (1 - \sigma^2)}{8E} r \left(\frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} R^2 - r^2 \right).$$

Это — выражение, переходящее при замене (13,3) в формулу, полученную в задаче 5 § 7.

2. Определить деформацию полубесконечной пластинки (с прямолинейным краем) под влиянием сосредоточенной силы, приложенной к точке края пластины и действующей в ее плоскости.

Решение. Вводим полярные координаты с углом φ , отсчитываемым от направления действия приложенной силы; он пробегает значения от $-(\pi/2 + \alpha)$ до $\pi/2 - \alpha$, где α — угол между направлением силы и нормалью к краю пластины (рис. 6).

Во всех точках свободной границы, за исключением точки приложения внешней силы (начала координат), должны выполняться условия $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0$. Воспользовавшись выражениями для $\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\sigma_{r\varphi}$, полученными в задаче 11 § 7, найдем, что для этого функция напряжений должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \text{const},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \text{const} \quad \text{при } \varphi = \mp \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

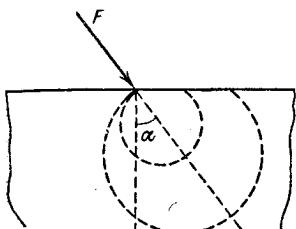


Рис. 6

Оба эти условия выполняются, если $\chi = rf(\varphi)$. При такой подстановке бигармоническое уравнение

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]^2 \chi = 0$$

дает для $f(\varphi)$ решения вида $\sin \varphi, \cos \varphi, \varphi \sin \varphi, \varphi \cos \varphi$. Из них первые два фиктивны, так как приводят к тождественно равным нулю напряжениям. Решение, дающее правильное значение приложенной в начале координат силы:

$$\chi = -\frac{F}{\pi} r \varphi \sin \varphi, \quad \sigma_{rr} = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0 \quad (1)$$

(F — значение силы, отнесенное к единице толщины пластины). Действительно, проецируя силы внутренних напряжений на направления, параллельное и перпендикулярное к силе F , и интегрируя по малой полуокружности с центром в начале координат (радиус которой можно представить себе стремящимся затем к нулю), получим

$$\int \sigma_{rr} \cos \varphi r d\varphi = -F, \quad \int \sigma_{r\varphi} \sin \varphi r d\varphi = 0,$$

т. е. как раз те значения, которые компенсируются приложенной в начале координат внешней силой.

Формулы (1) определяют искомое распределение напряжений. Оно оказывается чисто радиальным: на всякую площадку, перпендикулярную к радиусу, действует только радиальная сжимающая сила. Линиями равных напряжений являются окружности $r = d \cos \varphi$, проходящие через начало координат и имеющие центры на прямой, вдоль которой действует сила F (рис. 6).

Компоненты тензора деформации

$$u_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E}, \quad u_{\varphi\varphi} = -\frac{\sigma}{E} \sigma_{rr}, \quad u_{r\varphi} = 0.$$

Отсюда интегрированием (с помощью выражений (1,8) для компонент u_{ik} в полярных координатах) можно найти вектор смещения:

$$u_r = -\frac{2F}{\pi E} \cos \varphi \ln \frac{r}{a} - \frac{(1-\sigma)F}{\pi E} \varphi \sin \varphi,$$

$$u_\varphi = \frac{2\sigma F}{\pi E} \sin \varphi + \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{r}{a} \sin \varphi + \frac{(1-\sigma)F}{\pi E} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi).$$

Постоянные интегрирования выбраны здесь таким образом, чтобы исключить перемещение (перенос или поворот) пластиинки как целого; именно, предполагается несмещенной некоторая условно выбранная точка, находящаяся на расстоянии a от начала координат на линии действия силы.

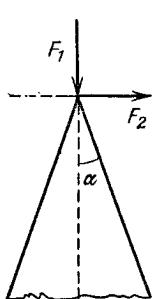


Рис. 7

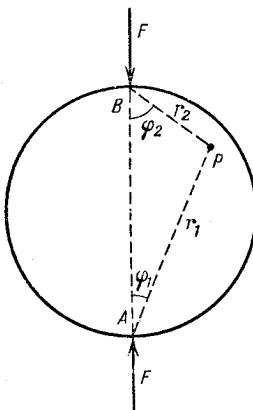


Рис. 8

С помощью полученного решения можно построить решение для произвольного распределения сил, действующих на край пластиинки (ср. § 8). Само по себе оно, разумеется, неприменимо в непосредственной окрестности начала координат.

3. Определить деформацию бесконечной клиновидной пластиинки (с углом 2α при вершине) под влиянием силы, приложенной к ее вершине.

Решение. Распределение напряжений определяется формулами, отличающимися от полученных в предыдущей задаче лишь нормировкой. Если сила действует вдоль средней линии клина (сила F_1 на рис. 7), то имеем

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_1 \cos \varphi}{r(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha)}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0.$$

Если же сила действует в перпендикулярном направлении (F_2 на рис. 7), то

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_2 \cos \varphi}{r(\alpha - 1/2 \sin 2\alpha)}.$$

В каждом из этих двух случаев угол φ отсчитывается от соответствующего направления действия силы.

4. Определить деформацию круглого диска (радиуса R), сжатого двумя равными и противоположными силами Fh , приложенными к двум концам диаметра (рис. 8).

Решение. Решение задачи получается путем наложения трех распределений внутренних напряжений. Два распределения:

$$\sigma_{r_1 r_1}^{(1)} = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi_1}{r_1}, \quad \sigma_{r_1 \varphi_1}^{(1)} = \sigma_{\varphi_1 \varphi_1}^{(1)} = 0,$$

$$\sigma_{r_2 r_2}^{(2)} = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi_2}{r_2}, \quad \sigma_{r_2 \varphi_2}^{(2)} = \sigma_{\varphi_2 \varphi_2}^{(2)} = 0,$$

где r_1, φ_1 и r_2, φ_2 — полярные координаты произвольной точки P с началами соответственно в точках A и B (это есть напряжения, которые возникли бы от нормальной силы F , приложенной к точке на границе полуплоскости, см. задачу 2).

Третье распределение

$$\sigma_{ik}^{(3)} = \frac{F}{\pi R} \delta_{ik}$$

представляет собой равномерное растяжение определенной интенсивности. Действительно, если точка P лежит на окружности края диска, то для нее $r_1 = 2R \cos \varphi_1, r_2 = 2R \cos \varphi_2$, так что

$$\sigma_{r_1 r_1}^{(1)} = \sigma_{r_2 r_2}^{(2)} = -F/\pi R.$$

Поскольку направления r_1 и r_2 в этой точке взаимно перпендикулярны, то мы видим, что первые две системы напряжений приводят на краю диска к равномерному сжатию; эти силы как раз компенсируются равномерным растяжением третьей системы, так что край диска оказывается, как и следовало, свободным от напряжений.

5. Определить распределение напряжений в неограниченной пластинке с круглым отверстием (радиуса R), подвергаемой равномерному растяжению.

Решение. Равномерному растяжению сплошной пластинки соответствуют напряжения $\sigma_{xx}^{(0)} = T, \sigma_{yy}^{(0)} = \sigma_{xy}^{(0)} = 0$, где T — растягивающая сила. Им отвечает функция напряжений

$$\chi^{(0)} = \frac{T}{2} y^2 = \frac{T}{2} r^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} Tr^2 (1 - \cos 2\varphi).$$

При наличии круглого отверстия (с центром в начале полярных координат r, φ) ищем функцию напряжений в виде

$$\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)}, \quad \chi^{(1)} = f(r) + F(r) \cos 2\varphi.$$

Не зависящий от φ интеграл бигармонического уравнения имеет вид

$$f(r) = ar^2 \ln r + br^2 + c \ln r,$$

а в интеграле, пропорциональном $\cos 2\varphi$:

$$F(r) = dr^2 + er^4 + g/r^2.$$

Входящие сюда постоянные определяются условиями $\sigma_{ik}^{(1)} = 0$ при $r = \infty$ и $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$ при $r = R$. В результате получим

$$\chi^{(1)} = \frac{TR^2}{2} \left[-\ln r + \left(1 - \frac{R^2}{2r^2} \right) \cos 2\varphi \right],$$

и распределение напряжений определяется так:

$$\sigma_{rr} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left[1 + \left(1 - \frac{3R^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{T}{2} \left[1 + \frac{R^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right],$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{T}{2} \left[1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4} \right] \sin 2\varphi.$$

В частности, на границе отверстия $\sigma_{\phi\phi} = T(1 - 2 \cos 2\varphi)$, а при $\varphi = \pm\pi/2$ $\sigma_{\phi\phi} = 3T$, т. е. в три раза превосходит напряжения на бесконечности (ср. задачу 12 § 7).

§ 14. Сильный изгиб пластинок

Изложенная в §§ 11—13 теория изгиба тонких пластинок применима лишь к достаточно слабым изгибам. Забегая вперед, укажем уже здесь, что условием применимости этой теории является малость прогиба ζ по сравнению с толщиной h пластиинки. Теперь мы перейдем к выводу уравнений равновесия сильно изогнутой пластиинки. Прогиб ζ при этом уже не предполагается малым по сравнению с h . Подчеркиваем, однако, что самая деформация по-прежнему должна быть мала в том смысле, что тензор деформации должен быть мал. Практически это обычно означает требование $\zeta \ll l$, т. е. прогиб должен быть мал по сравнению с размерами l пластиинки.

Изгиб пластиинки сопровождается, вообще говоря, ее общим растяжением¹⁾. В случае слабого изгиба этим растяжением можно пренебречь. При сильном же изгибе этого уже отнюдь нельзя сделать; в сильно изогнутой пластиинке не существует поэтому никакой «нейтральной поверхности». Наличие растяжения, сопровождающего изгиб, является специфической особенностью пластиинок, отличающей их от тонких стержней, которые могут быть подвергнуты сильному изгибу, не испытывая при этом общего растяжения. Это свойство пластиинок является чисто геометрическим. Пусть, например, плоская круглая пластиинка изгибается в поверхность шарового сегмента. Если произвести изгиб так, чтобы длина окружностей осталась неизменной, то должен растянуться ее диаметр. Если же диаметр пластиинки не растягивается, то должна сжаться ее окружность.

Вычисленная в § 11 энергия (11,6), которую можно назвать энергией чистого изгиба, представляет собой лишь ту часть полной энергии, которая обусловлена неравномерностью растяжения и сжатия вдоль толщины пластиинки при отсутствии какого-либо полного ее растяжения. Наряду с этой энергией в полную энергию входит еще часть, обусловленная как раз наличием этого общего растяжения; ее можно назвать энергией растяжения.

Деформации чистого изгиба и чистого растяжения были рассмотрены соответственно в §§ 11, 12 и 13. Поэтому теперь мы можем непосредственно воспользоваться полученными там результатами. При этом отпадает необходимость в рассмотрении структуры пластиинки по ее толщине, и мы можем сразу рассматривать пластиинку как двухмерную поверхность, не обладающую толщиной.

¹⁾ Исключением является, например, изгиб плоской пластиинки в цилиндрическую поверхность.