В частности, на границе отверстия $\sigma_{\varphi\varphi} = T(1 - 2\cos 2\varphi)$, а при $\varphi = \pm\pi/2$ $\sigma_{\varphi\varphi} = 3T$, т. е. в три раза превосходит напряжения на бесконечности (ср. задачу 12 § 7).

§ 14. Сильный изгиб пластинок

Изложенная в §§ 11—13 теория изгиба тонких пластинок применима лишь к достаточно слабым изгибам. Забегая вперед, укажем уже здесь, что условием применимости этой теории является малость прогиба ζ по сравнению с толщиной h пластинки. Теперь мы перейдем к выводу уравнений равновесия сильно изогнутой пластинки. Прогиб ζ при этом уже не предполагается малым по сравнению с h. Подчеркиваем, однако, что самая деформация по-прежнему должна быть мала в том смысле, что тензор деформации должен быть мал. Практически это обычно означает требование $\zeta \ll l$, т. е. прогиб должен быть мал по сравнению с размерами l пластинки.

Изгиб пластинки сопровождается, вообще говоря, ее общим растяжением [1]). В случае слабого изгиба этим растяжением можно пренебречь. При сильном же изгибе этого уже отнюдь нельзя сделать; в сильно изогнутой пластинке не существует поэтому никакой «нейтральной поверхности». Наличие растяжения, сопровождающего изгиб, является специфической особенностью пластинок, отличающей их от тонких стержней, которые могут быть подвергнуты сильному изгибу, не испытывая при этом общего растяжения. Это свойство пластинок является чисто геометрическим. Пусть, например, плоская круглая пластинка изгибается в поверхность шарового сегмента. Если произвести изгиб так, чтобы длина окружности осталась неизменной, то должен растянуться ее диаметр. Если же диаметр пластинки не растягивается, то должна сжаться ее окружность.

Вычисленная в § 11 энергия (11,6), которую можно назвать энергией чистого изгиба, представляет собой лишь ту часть полной энергии, которая обусловлена неравномерностью растяжения и сжатия вдоль толщины пластинки при отсутствии какого-либо полного ее растяжения. Наряду с этой энергией в полную энергию входит еще часть, обусловленная как раз наличием этого общего растяжения; ее можно назвать энергией растяжения.

Деформации чистого изгиба и чистого растяжения были рассмотрены соответственно в §§ 11, 12 и 13. Поэтому теперь мы можем непосредственно воспользоваться полученными там результатами. При этом отпадает необходимость в рассмотрении структуры пластинки по ее толщине, и мы можем сразу рассматривать пластинку как двухмерную поверхность, не обладающую толщиной.

---

[1]) Исключением является, например, изгиб плоской пластинки в цилиндрическую поверхность.

Предварительно выведем выражение для тензора деформации, определяющего растяжение пластинки (рассматриваемой как поверхность), подвергнутой одновременному изгибу и растяжению в своей плоскости. Пусть **u** есть двухмерный вектор смещения (с компонентами u_x, u_y) при чистом растяжении; ζ по-прежнему обозначает поперечное смещение при изгибе. Тогда элемент длины $dl^2 = dx^2 + dy^2$ недеформированной пластинки перейдет после деформации в элемент dl', квадрат которого равен

$$dl'^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + d\zeta^2.$$

Написав здесь $du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$ и аналогично для du_y и $d\zeta$, получим с точностью до членов более высокого порядка

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta,$$

где двухмерный тензор деформации определяется как

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta}. \tag{14,1}$$

(В этом и следующем параграфах мы будем обозначать посредством греческих букв индексы, пробегающие всего два значения x и y; по дважды повторяющимся индексам, как всегда, подразумевается суммирование.) Члены, квадратичные по производным от u_α, здесь опущены; того же самого с производными от ζ сделать, разумеется, нельзя, поскольку членов первого порядка по ним вообще не имеется.

Тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, связанный с растяжением пластинки, определяется формулами (13,2), в которые вместо $u_{\alpha\beta}$ надо подставить полный тензор деформации, определяемый согласно формуле (14,1). Энергия чистого изгиба определяется формулой (11,6), которую мы напишем условно в виде

$$\int \Psi_1(\zeta)\, dx\, dy,$$

где $\Psi_1(\zeta)$ обозначает все выражение, стоящее под интегралом (11,6). Энергия же растяжения, отнесенная к единице объема пластинки, есть, согласно общим формулам, $u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}/2$. Энергия, приходящаяся на единицу поверхности, получается отсюда умножением на h, так что полная энергия растяжения может быть написана в виде

$$\int \Psi_2(u_{\alpha\beta})\, df,$$

где

$$\Psi_2 = h\frac{u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}{2}. \tag{14,2}$$

Таким образом, полная свободная энергия сильно изогнутой пластинки есть

$$F_{\text{пл}} = \int [\Psi_1(\zeta) + \Psi_2(u_{\alpha\beta})]\, df. \tag{14,3}$$

Раньше чем перейти к выводу уравнений равновесия, оценим обе части энергии. Первые производные от ζ — порядка ζ/l, где l — размеры пластинки, а вторые — порядка ζ/l^2. Поэтому из (11,6) видно, что $\Psi_1 \sim Eh^3\zeta^2/l^4$. Порядок же величины тензора $u_{\alpha\beta}$ есть ζ^2/l^2, и потому $\Psi_2 \sim Eh\zeta^4/l^4$. Сравнение обоих этих выражений показывает, что пренебрежение Ψ_2, делаемое в приближенной теории изгиба пластинок, законно только при условии $\zeta^2 \ll h^2$.

Условие минимальности энергии гласит: $\delta F + \delta U = 0$, где U — потенциальная энергия в поле внешних сил. Мы будем считать, что действием внешних растягивающих сил, если таковые имеются, можно пренебречь по сравнению с силами изгибающими. (Это можно всегда сделать, если только растягивающие силы не слишком велики, поскольку тонкая пластинка гораздо легче подвергается изгибу, чем растяжению.) Тогда для δU имеем то же выражение, что и в § 12:

$$\delta U = -\int P\,\delta\zeta\,df,$$

где P — внешняя сила, отнесенная к единице поверхности пластинки. Вариация интеграла $\int \Psi_1 df$ была уже вычислена в § 12 и равна

$$\delta \int \Psi_1\,df = D \int \Delta^2\zeta\,\delta\zeta\,df.$$

Интегралы по контуру, стоящие в формуле (12,3), мы не пишем, поскольку они определяют не самое уравнение равновесия, а только граничные условия к нему, которыми мы не станем здесь интересоваться.

Наконец, вычислим вариацию интеграла $\int \Psi_2 df$. Варьирование в нем должно производиться как по компонентам вектора $\mathbf{u}$, так и по ζ. Имеем

$$\delta \int \Psi_2\,df = \int \frac{\partial\Psi_2}{\partial u_{\alpha\beta}}\,\delta u_{\alpha\beta}\,df.$$

Производные от свободной энергии единицы объема по $u_{\alpha\beta}$ равны $\sigma_{\alpha\beta}$; поэтому $\partial\Psi_2/\partial u_{\alpha\beta} = h\sigma_{\alpha\beta}$. Подставляя также для $u_{\alpha\beta}$ выражение (14,1), получаем

$$\delta\int\Psi_2\,df = h\int \sigma_{\alpha\beta}\,\delta u_{\alpha\beta}\,df =$$
$$= \frac{h}{2}\int \sigma_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial\,\delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\,\delta u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\beta}\right\} df,$$

или ввиду симметричности $\sigma_{\alpha\beta}$

$$\delta \int \Psi_2\,df = h \int \sigma_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial\,\delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x_\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right\} df.$$

Интегрируя теперь по частям, получаем

$$\delta \int \Psi_2\,df = -h\int\left[\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\,\delta u_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right)\delta\zeta\right] df.$$

Интегралы по контуру, огибающему поверхность пластинки, мы опять не пишем.

Сводя вместе все полученные выражения, имеем

$$\delta F_{\text{пл}} + \delta U =$$

$$= \int \left\{ \left[D\,\Delta^2\zeta - h\,\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right) - P \right] \delta\zeta - h\,\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\,\delta u_\alpha \right\} df = 0.$$

Для того чтобы это соотношение имело место тождественно, должны обращаться в нуль отдельно коэффициенты при $\delta\zeta$ и при δu_α. Таким образом, получаем систему уравнений

$$D\,\Delta^2\zeta - h\,\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right) = P, \tag{14,4}$$

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \tag{14,5}$$

В эту систему входят в качестве неизвестных функций три величины: две компоненты u_x, u_y вектора $\mathbf{u}$ и поперечное смещение ζ. Ее решение определяет одновременно форму изогнутой пластинки (т. е. функцию $\zeta(x, y)$) и возникающее в результате изгиба растяжение. Уравнения (14,4) и (14,5) могут быть несколько упрощены посредством введения в них функции χ, связанной с $\sigma_{\alpha\beta}$ соотношениями (13,7). После подстановки (13,7) в уравнение (14,4) оно приводится к виду

$$D\,\Delta^2\zeta - h\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right) = P. \tag{14,6}$$

Что касается уравнений (14,5), то выражениями (13,7) они удовлетворяются автоматически. Поэтому необходимо вывести еще одно уравнение, которое может быть получено исключением u_α из соотношений (13,7) и (13,2).

Для этого поступаем следующим образом. Выражаем $u_{\alpha\beta}$ через $\sigma_{\alpha\beta}$. Из (13,2) получаем

$$u_{xx} = \frac{1}{E}\,(\sigma_{xx} - \sigma\sigma_{yy}), \quad u_{yy} = \frac{1}{E}\,(\sigma_{yy} - \sigma\sigma_{xx}), \quad u_{xy} = \frac{1+\sigma}{E}\,\sigma_{xy}.$$

Подставляя сюда для $u_{\alpha\beta}$ выражение (14,1), а для $\sigma_{\alpha\beta}$ — выражения (13,7), находим равенства

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} - \sigma\,\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} - \sigma\,\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} = -\,\frac{2\,(1+\sigma)}{E}\,\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}.$$

Применим к первому операцию $\partial^2/\partial y^2$, ко второму $\partial^2/\partial x^2$, к третьему $\partial^2/\partial x\,\partial y$, после чего сложим первое со вторым и вычтем третье.

Тогда члены, содержащие u_x и u_y, взаимно сокращаются, и мы получаем уравнение

$$\Delta^2\chi + E\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\} = 0. \qquad (14,7)$$

Уравнения (14,6) и (14,7) представляют собой полную систему уравнений сильного изгиба тонких пластинок (*A. Föppl*, 1907). Эти уравнения весьма сложны и не могут быть решены точно даже в простейших случаях. Обращаем внимание на то, что они нелинейны.

Упомянем коротко об особом случае деформаций тонких пластинок — о так называемых мембранах. *Мембраной* называют тонкую пластинку, подвергнутую сильному растяжению приложенными к ее краям внешними растягивающими силами. В таком случае можно пренебречь дополнительными продольными натяжениями, возникающими при изгибе пластинки, и соответственно этому можно считать, что компоненты тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ равны просто постоянным внешним растягивающим напряжениям. В уравнении (14,4) можно теперь пренебречь первым членом по сравнению со вторым, и мы получаем уравнение равновесия

$$h\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} + P = 0 \qquad (14,8)$$

с граничным условием $\zeta = 0$ на контуре края мембраны. Это уравнение линейно. В особенности прост случай изотропного растяжения, когда натяжение мембраны одинаково по всем направлениям. Пусть T есть абсолютная величина приложенной к краю пластинки растягивающей силы, отнесенной к единице длины этого края. Тогда $h\sigma_{\alpha\beta} = T\delta_{\alpha\beta}$, и мы получаем уравнение равновесия в виде

$$T\,\Delta\zeta + P = 0. \qquad (14,9)$$

Задачи

1. Определить зависимость величины прогиба пластинки от действующей на нее силы при изгибе настолько сильном, что $\zeta \gg h$.

Решение. Оценка членов уравнения (14,7) показывает, что $\chi \sim E\zeta^2$. При $\zeta \gg h$ первый член в (14,6) мал по сравнению со вторым, который имеет порядок величины $h\zeta\chi/l^4 \sim Eh\zeta^3/l^4$ (l — размеры пластинки). Сравнивая с внешней силой P, получаем

$$\zeta \sim \left(\frac{l^4P}{Eh}\right)^{1/3}.$$

Отсюда, в частности, видно, что ζ пропорционально кубическому корню из силы.

2. Определить деформацию круглой мембраны (радиуса R), расположенной горизонтально в поле тяжести.

Решение. Имеем $P = \rho gh$; в полярных координатах (14,9) принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right) = -\frac{\rho gh}{T}.$$

Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $\zeta = 0$ при $r = R$, есть

$$\zeta = \frac{\rho g h}{4T}(R^2 - r^2).$$

§ 15. Деформации оболочек

Говоря до сих пор о деформациях тонких пластинок, мы всегда подразумевали, что в недеформированном состоянии пластинка является плоской. Между тем деформации пластинок, обладающих в своем естественном состоянии искривленной формой (такие пластинки называют *оболочками*), обнаруживают особенности, принципиально отличающие их от деформаций плоских пластинок.

Растяжение, сопровождающее изгиб плоской пластинки, является эффектом второго порядка малости по сравнению с величиной самого прогиба. Это проявляется, например, в том, что тензор деформации (14,1), определяющий такое растяжение, квадратичен по ζ. Совершенно иное положение имеет место при деформациях оболочек: здесь растяжение есть эффект первого порядка и потому играет существенную роль даже при слабом изгибе. Проще всего это свойство видно уже из самого простого примера равномерного растяжения сферической оболочки. Если все ее точки подвергаются одинаковому радиальному смещению ζ, то увеличение длины экватора равно $2\pi\zeta$. Относительное растяжение $2\pi\zeta/2\pi R = \zeta/R$, а потому и тензор деформации пропорционален первой степени ζ. Этот эффект стремится к нулю при $R \to \infty$, т. е. при стремлении кривизны к нулю, и является, таким образом, специфическим свойством, связанным с кривизной оболочки.

Пусть R есть порядок величины радиуса кривизны оболочки, совпадающей обычно с порядком величины ее размеров. Тогда тензор деформации растяжения, сопровождающего изгиб, — порядка ζ/R, соответствующий тензор напряжений $\sim E\zeta/R$, а энергия деформации (отнесенная к единице площади), согласно (14,2), $\sim Eh\,(\zeta/R)^2$. Энергия же чистого изгиба по-прежнему $\sim Eh^3\zeta^2/R^4$. Мы видим, что отношение первой ко второй $\sim(R/h)^2$, т. е. очень велико. Подчеркнем, что это имеет место независимо от соотношения между величиной ζ изгиба и толщиной h, в то время как при изгибе плоских пластинок растяжение начинало играть роль только при $\zeta \sim h$.

В некоторых случаях может существовать особый тип изгиба оболочек, при котором никакого растяжения не происходит вовсе. Так, например, цилиндрическая оболочка (с открытыми обоими концами цилиндра) может быть деформирована без растяжения, если все образующие цилиндра остаются при изгибе параллельными друг другу (т. е. оболочка как бы вдавливается по какой-нибудь из образующих). Такие деформации без рас-