

Решение, конечное при  $r = 0$  и удовлетворяющее условию  $\zeta = 0$  при  $r = R$ , есть

$$\zeta = \frac{\rho gh}{4T} (R^2 - r^2).$$

### § 15. Деформации оболочек

Говоря до сих пор о деформациях тонких пластинок, мы всегда подразумевали, что в недеформированном состоянии пластиинка является плоской. Между тем деформации пластиинок, обладающих в своем естественном состоянии искривленной формой (такие пластиинки называют *оболочками*), обнаруживают особенности, принципиально отличающие их от деформаций плоских пластиинок.

Растяжение, сопровождающее изгиб плоской пластиинки, является эффектом второго порядка малости по сравнению с величиной самого прогиба. Это проявляется, например, в том, что тензор деформации (14,1), определяющий такое растяжение, квадратичен по  $\zeta$ . Совершенно иное положение имеет место при деформациях оболочек: здесь растяжение есть эффект первого порядка и потому играет существенную роль даже при слабом изгибе. Проще всего это свойство видно уже из самого простого примера равномерного растяжения сферической оболочки. Если все ее точки подвергаются одному радиальному смещению  $\zeta$ , то увеличение длины экватора равно  $2\pi\zeta$ . Относительное растяжение  $2\pi\zeta/2\pi R = \zeta/R$ , а потому и тензор деформации пропорционален первой степени  $\zeta$ . Этот эффект стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , т. е. при стремлении кривизны к нулю, и является, таким образом, специфическим свойством, связанным с кривизной оболочки.

Пусть  $R$  есть порядок величины радиуса кривизны оболочки, совпадающей обычно с порядком величины ее размеров. Тогда тензор деформации растяжения, сопровождающего изгиб, — порядка  $\zeta/R$ , соответствующий тензор напряжений  $\sim E\zeta/R$ , а энергия деформации (отнесенная к единице площади), согласно (14,2),  $\sim Eh(\zeta/R)^2$ . Энергия же чистого изгиба по-прежнему  $\sim Eh^3\zeta^2/R^4$ . Мы видим, что отношение первой ко второй  $\sim (R/h)^2$ , т. е. очень велико. Подчеркнем, что это имеет место независимо от соотношения между величиной  $\zeta$  изгиба и толщиной  $h$ , в то время как при изгибе плоских пластиинок растяжение начинало играть роль только при  $\zeta \sim h$ .

В некоторых случаях может существовать особый тип изгиба оболочек, при котором никакого растяжения не происходит вовсе. Так, например, цилиндрическая оболочка (с открытыми обоими концами цилиндра) может быть деформирована без растяжения, если все образующие цилиндра остаются при изгибе параллельными друг другу (т. е. оболочка как бы вдавливается по какой-нибудь из образующих). Такие деформации без рас-

тяжения геометрически возможны, если оболочка имеет свободные края (т. е. не замкнута) или же если оболочка замкнута, но ее кривизна в разных местах имеет разный знак. Например, замкнутая сферическая оболочка не может быть изогнута без растяжения, если же в ней прорезано отверстие (причем его края не закреплены), то такие деформации становятся возможными. Поскольку энергия чистого изгиба мала по сравнению с энергией растяжения, то ясно, что если данная оболочка допускает деформации без растяжения, то именно такие деформации и будут, вообще говоря, реально осуществляться при воздействии на нее произвольных внешних сил. Требование отсутствия растяжения при изгибе накладывает существенные ограничения на возможные смещения  $u_\alpha$ . Эти условия являются чисто геометрическими и могут быть выражены в виде дифференциальных уравнений, которые должны содержаться в полной системе уравнений равновесия для таких деформаций. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

Если же деформация оболочки сопровождается растяжением, то напряжения растяжения, вообще говоря, велики по сравнению с напряжениями изгиба и последними можно пренебречь (основанную на таком пренебрежении теорию оболочек называют *мембранный*).

Энергия растяжения оболочки может быть вычислена как интеграл

$$F_{\text{пл}} = \frac{h}{2} \int u_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} df, \quad (15,1)$$

взятый по ее поверхности. Здесь  $u_{\alpha\beta}$  есть двухмерный ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) тензор деформации в соответствующих криволинейных координатах, а тензор напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  связан с  $u_{\alpha\beta}$  формулами (13,2), которые могут быть написаны в двухмерных тензорных обозначениях как

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1 - \sigma^2} [(1 - \sigma) u_{\alpha\beta} + \sigma \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma\gamma}]. \quad (15,2)$$

Особого рассмотрения требует случай, когда оболочка подвержена воздействию сосредоточенных сил в поперечном к оболочке направлении. Такими силами могут являться, в частности, силы реакции, действующие на оболочку со стороны опор в точках (или линиях) закрепления. Сосредоточенные силы производят изгиб оболочки в небольшой области вокруг точек их приложения. Пусть порядок величины этой области для приложенной в точке силы  $f$  есть  $d$  (так что ее площадь  $\sim d^2$ ). Поскольку изгиб  $\zeta$  сильно меняется на протяжении расстояний  $d$ , то энергия изгиба (на единицу площади) — порядка величины  $Eh^3\zeta^2/d^4$ , а полная энергия изгиба (на площади  $\sim d^2$ )  $\sim Eh^3\zeta^2/d^2$ . Тензор же деформации растяжения по-прежнему  $\sim \zeta/R$ , и полная энергия вызванного

сосредоточенной силой растяжения  $\sim Eh (\zeta/R)^2 d^2$ . Поскольку энергия изгиба растет, а энергия растяжения падает с уменьшением  $d$ , то ясно, что при определении деформации вблизи места приложения сосредоточенных сил должны быть учтены обе эти энергии. Величина области изгиба  $d$  определится по порядку величины из условия минимума суммы этих энергий, откуда

$$d \sim \sqrt{hR}. \quad (15,3)$$

При этом энергия  $\sim Eh^2 \zeta^2 / R$ . Варьируя ее по  $\zeta$  и приравнивая работе силы  $f$ , найдем величину прогиба  $\zeta \sim fR/Eh^2$ .

Однако если действующие на оболочку силы достаточно велики, то в оболочке могут возникнуть выпучивания, существенно меняющие ее форму. Определение деформации в зависимости от приложенных нагрузок требует в этом своеобразном случае специального исследования<sup>1)</sup>.

Пусть выпуклая оболочка (с краями, закрепленными так, чтобы гарантировать ее геометрическую несгибаемость) находится под действием большой сосредоточенной силы  $f$ , направленной по внутренней нормали к поверхности. Для простоты будем считать, что оболочка представляет собой часть сферы радиуса  $R$ . Область выпучивания будет шаровым сегментом,

ближким к зеркальному изображению его первоначальной формы (на рис. 9 изображен меридиональный разрез оболочки). Задача состоит в определении размеров выпучивания в зависимости от величины силы.

Основная часть упругой энергии сконцентрирована в узкой полосе вблизи края области выпучивания, где изгиб оболочки сравнительно велик (будем называть ее полосой изгиба и обозначим ее ширину через  $d$ ). Оценим эту энергию, причем будем предполагать размеры (радиус) области выпучивания  $r \ll R$ ; тогда угол  $\alpha \ll 1$  (см. рис. 9). При этом  $r = R \sin \alpha \sim R\alpha$ , а глубина прогиба  $H = 2R(1 - \cos \alpha) \sim R\alpha^2$ . Обозначим посредством  $\zeta$  смещение точек оболочки в полосе изгиба. Точно так же, как это было сделано выше, находим, что энергия изгиба вдоль меридиана и растяжения вдоль параллели<sup>2)</sup>, отнесенные к 1 см<sup>2</sup>

<sup>1)</sup> Излагаемые ниже результаты принадлежат А. В. Погорелову (1960). Более точный анализ данного вопроса, а также другие аналогичные задачи, можно найти в его книге «Теория оболочек при закритических деформациях», — М.: Наука, 1965.

<sup>2)</sup> На изгибе по меридиану кривизна оболочки в первом приближении не скользит, так что он происходит, как и при цилиндрическом изгибе плоской пластиинки, без общего растяжения по меридиану.

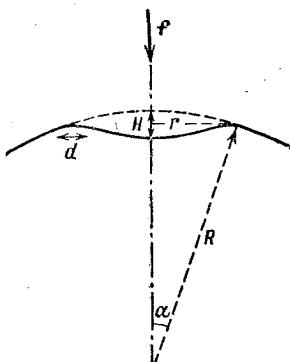


Рис. 9

поверхности, по порядку величины равны соответственно

$$Eh^3\zeta^2/d^4 \text{ и } Eh\zeta^2/R^2.$$

Порядок величины смещения  $\zeta$  определяется в данном случае геометрически: направление меридиана меняется на ширине  $d$  на угол  $\sim\alpha$ , и потому  $\zeta \sim ad \sim rd/R$ . Умножив также на площадь полосы изгиба ( $\sim rd$ ), получим энергию

$$Eh^3r^3/R^2d \text{ и } Eh^3r^3/R^4,$$

Из условия минимальности их суммы снова найдем  $d \sim (hR)^{1/2}$ , а полная упругая энергия при этом  $\sim Er^3(h/R)^{5/2}$  или, иначе<sup>1)</sup>,

$$\text{const} \cdot Eh^{5/2} \frac{H^{3/2}}{R}. \quad (15.4)$$

В произведенном выводе подразумевалось, что  $d \ll r$ ; поэтому формула (15.4) справедлива при условии

$$Rh/r^2 \ll 1. \quad (15.5)$$

При образовании выпучивания внешние слои шарового сегмента становятся внутренними и соответственно сжимаются, а внутренние — внешними и растягиваются. Относительное растяжение (или сжатие)  $\sim h/R$ , так что связанная с ним полная энергия в области выпучивания  $\sim E(h/R)^2 hr^2$ . При условии (15.5) она действительно мала по сравнению с энергией в полосе изгиба (15.4).

Искомая зависимость между глубиной прогиба  $H$  и приложенной силой  $f$  получится приравниванием  $f$  к производной от энергии (15.4) по  $H$ . Таким образом, найдем

$$H \sim f^2 R^2 / E^2 h^5. \quad (15.6)$$

Обратим внимание на нелинейный характер этой зависимости.

Наконец, пусть деформация (выпучивание) оболочки происходит под действием равномерного внешнего давления  $p$ . Работа внешних сил в таком случае равна  $p \Delta V$ , где  $\Delta V \sim Hr^2 \sim H^2 R$  — изменение ограничиваемого оболочкой объема при выпучивании. Приравняв нуль производную по  $H$  от полной свободной энергии (т. е. упругой энергии (15.4) за вычетом указанной работы), получим

$$H \sim h^5 E^2 / R^4 p^2. \quad (15.7)$$

Обратный характер зависимости (увеличение  $H$  при уменьшении  $p$ ) указывает на неустойчивость выпущенного состояния в этом случае. Определяемое формулой (15.7) значение  $H$  отвечает неустойчивому равновесию при заданном  $p$ : выпучивания с большими значениями  $H$  самопроизвольно растут, а с меньшими —

<sup>1)</sup> Более точное вычисление дает для постоянного коэффициента значение  $\text{const} = 1,2(1 - \sigma^2)^{-3/4}$ .

уменьшаются (легко проверить, что (15,7) отвечает максимуму, а не минимуму полной свободной энергии). Существует такое критическое значение внешней нагрузки  $p = p_{kp}$ , за которым самопроизвольно возрастают уже малые изменения формы оболочки. Его можно оценить как то значение  $p$ , при котором формула (15,7) дает  $H \sim h$ :

$$p_{kp} \sim Eh^2/R^2. \quad (15,8)$$

Мы ограничимся в теории оболочек изложенными краткими сведениями и некоторыми простыми примерами, приведенными в задачах к этому параграфу.

### Задача

1. Вывести уравнения равновесия для сферической оболочки (радиуса  $R$ ), деформируемой симметрично относительно оси, проходящей через ее центр.

**Решение.** В качестве двухмерных координат на поверхности оболочки пользуемся углами  $\theta, \varphi$  сферической системы координат с началом в центре сферы и полярной осью по оси симметрии деформированной оболочки.

Пусть  $P_r$  — отнесенная к единице поверхности оболочки радиальная внешняя сила. Эта сила должна компенсироваться радиальной равнодействующей сил внутренних напряжений, действующих на элемент оболочки в тангенциальных к нему направлениях. Соответствующее условие гласит:

$$\frac{h}{R} (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}) = P_r. \quad (1)$$

Это уравнение в точности аналогично известному уравнению Лапласа, определяющему разность давлений двух сред, связанную с действующим в поверхности их раздела поверхностным напряжением.

Пусть, далее,  $Q_z(\theta)$  есть направленная вдоль полярной оси (оси  $z$ ) равнодействующая всех внешних сил, действующих на часть оболочки, расположенную над параллельным кругом  $\theta = \text{const}$ . Эта сила должна компенсироваться проекцией на ось  $z$  напряжений  $2\pi R \sin \theta \sigma_{\theta\theta}$ , действующих на сечение  $2\pi Rh \sin \theta$  оболочки по указанной окружности. Отсюда

$$2\pi Rh \sin^2 \theta \sigma_{\theta\theta} = Q_z(\theta). \quad (2)$$

Уравнениями (1) и (2) определяется распределение напряжений, после чего тензор деформации находится по формулам

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma \sigma_{\varphi\varphi}), \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma \sigma_{\theta\theta}), \quad u_{\theta\varphi} = 0, \quad (3)$$

а затем вектор смещения с помощью уравнений

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left( \frac{du_\theta}{d\theta} + u_r \right), \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} (u_\theta \operatorname{ctg} \theta + u_r). \quad (4)$$

2. Определить деформацию под влиянием собственного веса полусферической оболочки, расположенной куполом вверх; края купола свободно перемещаются по горизонтальной опоре (рис. 10).

**Решение.** Имеем

$$P_r = -\rho gh \cos \theta, \quad Q_z = -2\pi R^2 (1 - \cos \theta) \rho gh$$

( $Q_z$  есть полный вес оболочки над окружностью  $\theta = \text{const}$ ). Из (1) и (2) находим

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{R\rho g}{1 + \cos \theta}, \quad \sigma_{rr} = R\rho g \left( \frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right).$$

По формулам (3) вычисляем  $u_{\Phi\Phi}$  и  $u_{\theta\theta}$ , после чего из уравнений (4) вычисляем  $u_r$  и  $u_\theta$  (постоянная, возникающая при интегрировании первого из этих уравнений, определяется так, чтобы при  $\theta = \pi/2$  было  $u_\theta = 0$ ). В результате получим

$$u_\theta = \frac{R^2 \rho g (1 + \sigma)}{E} \left[ \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \ln(1 + \cos \theta) \right] \sin \theta,$$

$$u_r = \frac{R^2 \rho g (1 + \sigma)}{E} \left[ 1 - \frac{2 + \sigma}{1 + \sigma} \cos \theta - \cos \theta \ln(1 + \cos \theta) \right].$$

Значение  $u_r$  при  $\theta = \pi/2$  дает горизонтальное смещение опоры.

3. Определить деформацию полусферической оболочки с закрепленными краями, расположенной куполом вниз и наполненной жидкостью (рис. 11); весом самой оболочки можно пренебречь по сравнению с весом жидкости.

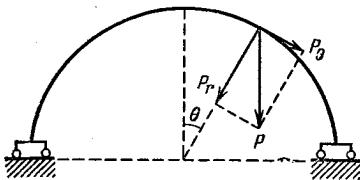


Рис. 10

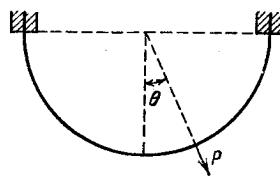


Рис. 11

**Решение.** Имеем

$$P_r = \rho_0 g R \cos \theta, \quad P_\theta = 0,$$

$$Q_z = 2\pi R^2 \int_0^\theta P_r \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\pi R^3 \rho_0 g}{3} (1 - \cos^2 \theta)$$

( $\rho_0$  — плотность жидкости). Далее, по формулам (1) и (2) находим

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R^2 \rho_0 g}{3h} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{\Phi\Phi} = \frac{R^2 \rho_0 g}{3h} \frac{(-1 + 3 \cos \theta - 2 \cos^3 \theta)}{\sin^2 \theta}.$$

Для смещений получается

$$u_\theta = -\frac{R^3 \rho_0 g (1 + \sigma)}{3Eh} \sin \theta \left[ \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \ln(1 + \cos \theta) \right],$$

$$u_r = \frac{R^3 \rho_0 g (1 + \sigma)}{3Eh} \left[ \cos \theta \ln(1 + \cos \theta) - 1 + \frac{3 \cos \theta}{1 + \sigma} \right].$$

При  $\theta = \pi/2$   $u_r$  остается конечным, а не обращается в нуль, как должно было быть. Это значит, что в действительности вблизи линии закрепления оболочки происходит настолько сильный ее изгиб, что полученное решение становится неприменимым.

4. Оболочка в виде шарового сегмента опирается своими свободными краями на неподвижную опору (рис. 12). Определить величину ее прогиба под действием собственного веса  $Q$ .

**Решение.** Основная деформация происходит вблизи краев, отгибающихся в сторону (штриховая линия на рис. 12). При этом смещение  $u_\theta$  мало по сравнению с радиальным смещением  $u_r \equiv \zeta$ . Поскольку  $\zeta$  быстро убывает по мере удаления от линии опоры, то возникающую деформацию можно рассматривать как деформацию плоской длиной ( $2\pi R \sin \alpha$ ) пластинки. Эта деформация складывается из изгиба и растяжения пластинки. Относительное удлинение пластинки в каждой ее точке равно  $\zeta/R$  ( $R$  — радиус оболочки), и потому энергия растяжения (на единицу объема) есть  $E\zeta^2/2R^2$ . Вводя в каче-

стве независимой переменной расстояние  $x$  от линии опоры, имеем для полной энергии растяжения

$$F_{1\text{пл}} = 2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{2R^2} \int \zeta^2 dx.$$

Энергия же изгиба есть

$$F_{2\text{пл}} = 2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{24(1-\sigma^2)} \int \left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Варьируя сумму  $F_{\text{пл}} = F_{1\text{пл}} + F_{2\text{пл}}$  по  $\zeta$ , получим уравнение

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} + \frac{12(1-\sigma^2)}{h^2 R^2} \zeta = 0.$$

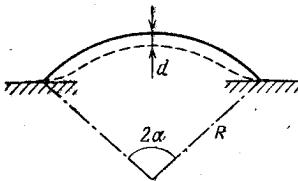


Рис. 12

При  $x \rightarrow \infty$   $\zeta$  должно стремиться к нулю, а при  $x = 0$  должны выполняться граничные условия равенства нулю момента сил:  $\zeta'' = 0$ , и условие равенства развивающейся при изгибе силы нормальной к поверхности оболочки компоненте силы тяжести:

$$2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \zeta''' = Q \cos \alpha.$$

Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\zeta = Ae^{-kx} \cos kx,$$

где

$$k = \left[ \frac{3(1-\sigma^2)}{h^2 R^2} \right]^{1/4}, \quad A = \frac{Q \operatorname{ctg} \alpha}{Eh} \left[ \frac{3R^2(1-\sigma^2)}{8\pi h^2} \right]^{1/4}.$$

Величина прогиба оболочки есть

$$d = \zeta(0) \cos \alpha = A \cos \alpha.$$

## § 16. Кручение стержней

Перейдем теперь к изучению деформаций тонких стержней. Этот случай отличается от всех ранее рассматривавшихся тем, что вектор смещения  $u$  может быть большим даже при слабой деформации, т. е. при малом тензоре  $u_{ik}$ <sup>1)</sup>. Так, при слабом сгибании тонкого длинного стержня его концы могут значительно переместиться в пространстве, даже если относительные смещения соседних точек в стержне малы.

Существует два типа деформаций стержней, могущих сопровождаться большим смещением отдельных частей стержня. Одним из них является изгиб стержня, а вторым — его *кручение*. С рассмотрения этого второго случая мы и начнем.

Деформация кручения заключается в том, что в стержне, остающемся при этом прямым, каждое поперечное сечение поворачивается относительно ниже лежащих на некоторый угол.

<sup>1)</sup> Исключением является только простое растяжение стержня без изменения его формы, — при слабом растяжении наряду с тензором  $u_{ik}$  всегда мал также и вектор  $u$ .