

стве независимой переменной расстояние  $x$  от линии опоры, имеем для полной энергии растяжения

$$F_{1\text{пл}} = 2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{2R^2} \int \zeta^2 dx.$$

Энергия же изгиба есть

$$F_{2\text{пл}} = 2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{24(1-\sigma^2)} \int \left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Варьируя сумму  $F_{\text{пл}} = F_{1\text{пл}} + F_{2\text{пл}}$  по  $\zeta$ , получим уравнение

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} + \frac{12(1-\sigma^2)}{h^2 R^2} \zeta = 0.$$

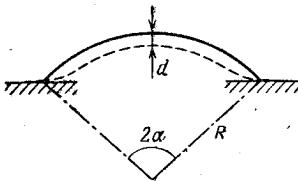


Рис. 12

При  $x \rightarrow \infty$   $\zeta$  должно стремиться к нулю, а при  $x = 0$  должны выполняться граничные условия равенства нулю момента сил:  $\zeta'' = 0$ , и условие равенства развивающейся при изгибе силы нормальной к поверхности оболочки компоненте силы тяжести:

$$2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \zeta''' = Q \cos \alpha.$$

Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\zeta = Ae^{-kx} \cos kx,$$

где

$$k = \left[ \frac{3(1-\sigma^2)}{h^2 R^2} \right]^{1/4}, \quad A = \frac{Q \operatorname{ctg} \alpha}{Eh} \left[ \frac{3R^2(1-\sigma^2)}{8\pi h^2} \right]^{1/4}.$$

Величина прогиба оболочки есть

$$d = \zeta(0) \cos \alpha = A \cos \alpha.$$

## § 16. Кручение стержней

Перейдем теперь к изучению деформаций тонких стержней. Этот случай отличается от всех ранее рассматривавшихся тем, что вектор смещения  $u$  может быть большим даже при слабой деформации, т. е. при малом тензоре  $u_{ik}$ <sup>1)</sup>. Так, при слабом сгибании тонкого длинного стержня его концы могут значительно переместиться в пространстве, даже если относительные смещения соседних точек в стержне малы.

Существует два типа деформаций стержней, могущих сопровождаться большим смещением отдельных частей стержня. Одним из них является изгиб стержня, а вторым — его *кручение*. С рассмотрения этого второго случая мы и начнем.

Деформация кручения заключается в том, что в стержне, остающемся при этом прямым, каждое поперечное сечение поворачивается относительно ниже лежащих на некоторый угол.

<sup>1)</sup> Исключением является только простое растяжение стержня без изменения его формы, — при слабом растяжении наряду с тензором  $u_{ik}$  всегда мал также и вектор  $u$ .

Если стержень длинный, то при слабом кручении достаточно удаленные друг от друга сечения могут повернуться на большой угол. Образующие боковой поверхности стержня, параллельные его оси, приобретают при кручении винтовую форму.

Рассмотрим тонкий прямой стержень произвольного сечения. Выберем систему координат с осью  $z$  вдоль оси стержня и началом координат где-нибудь внутри него. Введем угол *кручения*  $\tau$  как угол поворота, отнесенный к единице длины стержня. Это значит, что два бесконечно близких поперечных сечения, находящихся на расстоянии  $dz$ , поворачиваются друг относительно друга на угол  $d\varphi = \tau dz$  (так что  $\tau = d\varphi/dz$ ). Сама деформация кручения, т. е. относительные смещения соседних частей стержня, предполагаются малыми. Условием этого является малость относительного поворота сечений, удаленных вдоль длины стержня на расстояния порядка его поперечных размеров  $R$ , т. е.

$$\tau R \ll 1. \quad (16,1)$$

Рассмотрим небольшую область длины стержня вблизи начала координат и определим смещения и точек стержня в этой области. В качестве несмещенного выберем поперечное сечение стержня в координатной плоскости  $x, y$ . Как известно, при повороте радиус-вектора  $r$  на малый угол  $\delta\varphi$  смещение его конца определяется формулой

$$\delta r = [\delta\varphi r], \quad (16,2)$$

где  $\delta\varphi$  — вектор с абсолютной величиной, равной углу поворота, направленный вдоль оси, вокруг которой производится поворот. В нашем случае поворот производится вокруг оси  $z$ , причем для точек с координатой  $z$  угол поворота относительно плоскости  $x, y$  равен  $\tau z$  (угол  $\tau$  в области вблизи начала координат можно рассматривать как постоянный). Формула (16,2) дает теперь для компонент  $u_x, u_y$  вектора смещения

$$u_x = -\tau z y, \quad u_y = \tau z x. \quad (16,3)$$

При кручении стержня его точки испытывают, вообще говоря, также и смещение вдоль оси  $z$ . Поскольку при  $\tau = 0$  это смещение отсутствует, то при малых  $\tau$  его можно считать пропорциональным  $\tau$ . Таким образом,

$$u_z = \tau \psi(x, y), \quad (16,4)$$

где  $\psi(x, y)$  — некоторая функция от  $x$  и  $y$ , называемая *функцией кручения*. В результате описываемой формулами (16,3) и (16,4) деформации каждое поперечное сечение стержня поворачивается вокруг оси  $z$ , одновременно искривляясь, переставая быть плоским. Следует заметить, что, выбрав определенным образом начало координат в плоскости  $x, y$ , мы тем самым «закрепляем» определенную точку сечения стержня так, что она не смещается в этой плоскости (смещающаяся, однако, вдоль оси  $z$ ); изменение вы-

бора начала координат не отразилось бы, разумеется, на самой деформации кручения, приведя лишь к несущественному общему смещению стержня как целого.

Зная  $u$ , можно найти компоненты тензора деформации. Поскольку  $u$  в рассматриваемой области мало, то можно воспользоваться формулой  $u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ . В результате находим

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{yy} = u_{xy} = u_{zz} = 0, \\ u_{xz} &= \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad u_{yz} = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (16,5)$$

Обращаем внимание на то, что  $u_{ii} = 0$ ; другими словами, кручение не сопровождается изменением объема, т. е. представляет собой деформацию чистого сдвига.

Для компонент тензора напряжений находим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0, \\ \sigma_{xz} &= 2\mu u_{xz} = \mu \tau \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = \mu \tau \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad (16,6)$$

(здесь удобнее пользоваться модулем сдвига  $\mu$  вместо  $E$  и  $\sigma$ ). Поскольку отличны от нуля только  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$ , то общие уравнения равновесия  $\partial \sigma_{ik} / \partial x_k = 0$  сводятся к уравнению

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0. \quad (16,7)$$

Подставив сюда (16,6), мы найдем, что функция кручения должна удовлетворять уравнению

$$\Delta \psi = 0, \quad (16,8)$$

где  $\Delta$  — двухмерный оператор Лапласа.

Несколько более удобно, однако, пользоваться другой вспомогательной функцией  $\chi(x, y)$ , определяемой равенствами

$$\sigma_{xz} = 2\mu \tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -2\mu \tau \frac{\partial \chi}{\partial x}; \quad (16,9)$$

для этой функции получаются более удобные граничные условия на контуре сечения стержня (см. ниже). Сравнив (16,9) с (16,6), получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y + 2 \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -x - 2 \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (16,10)$$

Дифференцируя первое равенство по  $y$ , второе по  $x$  и вычитая одно из другого, получим для функции  $\chi$  следующее уравнение:

$$\Delta \chi = -1. \quad (16,11)$$

Для определения граничных условий на поверхности стержня замечаем, что благодаря малой толщине стержня действующие на его боковую поверхность внешние силы малы по сравнению

с возникающими в стержне внутренними напряжениями и потому могут быть положены (при отыскании граничных условий) равными нулю. Это обстоятельство в точности аналогично тому, что мы имели при рассмотрении изгиба тонких пластинок. Таким образом, на боковой поверхности стержня должно быть  $\sigma_{tz}n_t = 0$ ; поскольку ось  $z$  направлена по оси стержня, то вектор нормали  $n$  имеет только компоненты  $n_x, n_y$ , так что написанное уравнение сводится к условию

$$\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y = 0.$$

Подставляя сюда (16,9), получаем

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \chi}{\partial x} n_y = 0.$$

Но компоненты вектора нормали к плоскому контуру (контуру сечения стержня) равны  $n_x = -\frac{dy}{dl}$ ,  $n_y = \frac{dx}{dl}$ , где  $x, y$  — координаты точек контура, а  $dl$  — элемент дуги. Таким образом, получаем

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy = d\chi = 0,$$

откуда  $\chi = \text{const}$ , т. е. на контуре сечения функция  $\chi$  постоянна. Поскольку в определения (16,9) входят только производные от функции  $\chi$ , то ясно, что к этой функции можно прибавлять любую постоянную. Если контур сечения односвязен, то можно, следовательно, без всякого ограничения общности положить на нем в качестве граничного условия к уравнению (16,11)<sup>1)</sup>

$$\chi = 0. \quad (16,12)$$

В случае же многосвязного контура  $\chi$  будет иметь различные постоянные значения на каждой из замкнутых кривых, составляющих контур. Поэтому положить  $\chi$  равным нулю можно будет лишь на одной из этих кривых, например на внешнем контуре ( $C_0$  на рис. 13). Значения же  $\chi$  на остальных частях контура определяются из условия, являющегося следствием однозначности смещения  $u_z = \tau\psi(x, y)$  как функции координат. Именно, ввиду однозначности функции кручения  $\psi(x, y)$  интеграл от ее диффе-

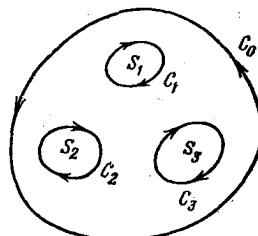


Рис. 13

<sup>1)</sup> Задача об определении деформации кручения по уравнению (16,11) с граничным условием (16,12) формально совпадает с задачей об определении формы прогиба равномерно нагруженной плоской мембранны по уравнению (14,9).

Полезно заметить также гидродинамическую аналогию: уравнением вида (16,11) определяется распределение скоростей  $v(x, y)$  вязкой жидкости по сечению трубы; граничному условию (16,12) соответствует условие  $v = 0$  на неподвижных стенках трубы (см. VI, § 17).

ренциала  $d\phi$  по замкнутому контуру должен быть равен нулю. С помощью соотношений (16,10) имеем поэтому

$$\oint d\psi = \oint \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = -2 \oint \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} dy - \frac{\partial \chi}{\partial y} dx \right) - \oint (x dy - y dx) = 0,$$

или

$$\oint \frac{\partial \chi}{\partial n} dl = -S, \quad (16,13)$$

где  $\partial \chi / \partial n$  есть производная функции  $\chi$  по направлению внешней нормали к контуру, а  $S$  — охватываемая этим контуром площадь. Применяя (16,13) к каждой из замкнутых кривых  $C_1, C_2, \dots$ , мы и получим искомые условия.

Определим свободную энергию подвергнутого кручению стержня. Для энергии единицы объема имеем

$$F = \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2} = \sigma_{xz} u_{xz} + \sigma_{yz} u_{yz} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)$$

и, подставляя сюда (16,9):

$$F = 2\mu \tau^2 \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] \equiv 2\mu \tau^2 (\nabla \chi)^2,$$

где  $\nabla$  означает двухмерный градиент. Энергия кручения, отнесенная к единице длины стержня, получится отсюда интегрированием по площади поперечного сечения, т. е. равна  $C\tau^2/2$ , где коэффициент  $C$  равен

$$C = 4\mu \int (\nabla \chi)^2 df.$$

Величину  $C$  называют *крутильной жесткостью* стержня. Полная упругая энергия стержня равна интегралу

$$F_{ct} = \frac{1}{2} \int C \tau^2 dz, \quad (16,14)$$

взятыму по его длине.

Написав

$$(\nabla \chi)^2 = \nabla (\chi \nabla \chi) - \chi \Delta \chi = \nabla (\chi \nabla \chi) + \chi$$

и преобразуя интеграл от первого члена в интеграл по линии контура сечения стержня, получим

$$C = 4\mu \oint \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} dl + 4\mu \int \chi df. \quad (16,15)$$

Если контур сечения односвязан, то ввиду граничного условия  $\chi = 0$  первый член исчезает и остается

$$C = 4\mu \int \chi dx dy. \quad (16,16)$$

Для многосвязной же границы (рис. 13), положив  $\chi = 0$  на внешнем контуре  $C_0$  и обозначив посредством  $\chi_h$  постоянные значения  $\chi$  на внутренних контурах  $C_h$ , получим с помощью (16,13)

$$C = 4\mu \sum_h \chi_h S_h + 4\mu \int \chi dx dy \quad (16,17)$$

(следует помнить, что при интегрировании в первом члене в (16,15) контур  $C_0$  обходится в прямом, а контур  $C_h$  — в обратном направлениях).

Рассмотрим наиболее обычный случай кручения, когда один из концов стержня закреплен неподвижно, а внешние силы приложены только к поверхности другого его конца. Эти силы таковы, что производят только кручение стержня без какой бы то ни было другой его деформации, например изгиба. Другими словами, они составляют некоторую пару сил, закручающую стержень вокруг его оси. Момент этой пары обозначим посредством  $M$ .

Естественно ожидать, что в таком случае угол кручения  $\tau$  постоянен вдоль длины стержня. В этом можно убедиться, например, из условия минимума полной свободной энергии стержня в равновесии. Полная энергия деформированного стержня равна сумме  $F_{ct} + U$ , где  $U$  — потенциальная энергия, обусловленная действием внешних сил. Подставляя в (16,14)  $\tau = d\phi/dz$  и варьируя по углу  $\phi$ , находим

$$\delta \frac{1}{2} \int C \left( \frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz + \delta U = \int C \frac{d\phi}{dz} \frac{d\delta\phi}{dz} dz + \delta U = 0,$$

или, интегрируя по частям,

$$- \int C \frac{d\tau}{dz} \delta\phi dz + \delta U + C\tau \delta\phi = 0.$$

В последнем члене слева берется разность значений на пределах интегрирования, т. е. на концах стержня. Один из этих концов, скажем нижний, закреплен так, что на нем  $\delta\phi = 0$ . Что касается вариации  $\delta U$  потенциальной энергии, то, взятая с обратным знаком, она представляет собой работу внешних сил при повороте на угол  $\delta\phi$ . Как известно из механики, работа пары сил при таком повороте равна произведению  $M\delta\phi$  угла поворота на момент пары. Поскольку никаких других внешних сил нет, то  $\delta U = -M\delta\phi$ , и мы получаем

$$\int C \frac{d\tau}{dz} \delta\phi dz + \delta\phi (-M + C\tau) = 0. \quad (16,18)$$

Во втором члене берется его значение на верхнем пределе. В интеграле по  $dz$  вариация  $\delta\phi$  произвольна, а потому должно быть  $C d\tau/dz = 0$ , т. е.

$$\tau = \text{const.} \quad (16,19)$$

Таким образом, угол кручения постоянен вдоль всей длины стержня. Полный угол поворота верхнего основания относительно нижнего равен поэтому просто произведению  $\tau l$  угла  $\tau$  на длину  $l$  стержня.

В уравнении (16,18) должен исчезнуть также и второй член. Отсюда находим следующее выражение для постоянного угла кручения:

$$\tau = M/C. \quad (16,20)$$

### Задачи

1. Определить крутильную жесткость стержня с круговым сечением (радиуса  $R$ ).

**Решение.** Решения задач 1—4 формально совпадают с решениями задач о движении вязкой жидкости в трубе соответствующего сечения (см. примечание на с. 89); количеству  $Q$  протекающей через сечение трубы жидкости соответствует здесь величина  $C$ .

Для стержня кругового сечения имеем (начало координат в центре сечения)

$$\chi = 1/4 (R^2 - x^2 - y^2).$$

Крутильная жесткость:

$$C = \mu \pi R^4 / 2.$$

Для функции  $\psi$  получаем из (16,10)  $\psi = \text{const}$ . Но постоянная  $\psi$  соответствует, согласно (16,4), простому смещению стержня как целого вдоль оси  $z$ ; поэтому можно считать, что  $\psi = 0$ . Таким образом, поперечные сечения кругового стержня при кручении остаются плоскими.

2. То же для стержня эллиптического сечения (полуоси  $a$  и  $b$ ).

**Решение.** Крутильная жесткость:

$$C = \mu \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Распределение продольных смещений дается функцией кручения:

$$\psi = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy$$

(оси координат направлены по осям эллипса).

3. То же для стержня с сечением в виде равностороннего треугольника (длина сторон  $a$ ).

**Решение.** Крутильная жесткость:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{80} \mu a^4.$$

Функция кручения:

$$\psi = \frac{1}{6a} y (x\sqrt{3} + y)(x\sqrt{3} - y),$$

причем начало координат выбрано в центре треугольника, а ось  $x$  совпадает с одной из его высот.

4. То же для стержня, имеющего вид длинной тонкой пластинки (ширина  $d$ , толщина  $h \ll d$ ).

**Решение.** Задача эквивалентна задаче о течении вязкой жидкости между плоскопараллельными стенками. Результат:

$$C = \mu dh^3 / 3.$$

5. То же для цилиндрической трубы (внутренний и внешний радиусы  $R_1$  и  $R_2$ ).

Решение. Функция

$$\chi = \frac{1}{4} (R_2^2 - r^2)$$

(в полярных координатах) удовлетворяет условию (16,13) на обеих границах кольцевого сечения трубы. По формуле (16,17) найдем

$$C = \frac{\pi}{2} \mu (R_2^4 - R_1^4).$$

6. То же для тонкостенной трубы произвольного сечения.

Решение. Ввиду тонкости стенки трубы можно считать, что на протяжении ее ширины  $h$  функция  $\chi$  меняется от нуля на одной стороне до  $\chi_1$  на другой по линейному закону  $\chi = \chi_1 y/h$  ( $y$  — координата вдоль толщины стенки). Тогда условие (16,13) дает  $\chi_1 L/h = S$ , где  $L$  — длина периметра сечения трубы, а  $S$  — охватываемая им площадь. В выражении (16,17) второй член мал по сравнению с первым, и мы получаем

$$C = 4hS^2\mu/L.$$

Если трубу разрезать продольно по одной из ее образующих, то крутильная жесткость резко уменьшается, становясь равной (согласно результату задачи 4)  $C = \mu L h^3/3$ .

## § 17. Изгиб стержней

В изогнутом стержне в некоторых местах его происходит растяжение, а в других — сжатие. Растигнуты линии на выпуклой стороне изогнутого стержня, а на вогнутой стороне происходит сжатие. Как и в случае пластинок, вдоль длины стержня внутри него существует «нейтральная» поверхность, на которой не происходит ни растяжения, ни сжатия. Она отделяет собой области сжатия от областей растяжения.

Начнем с исследования деформации изгиба в небольшом участке длины стержня, в котором изгиб можно считать слабым; под слабым мы понимаем здесь изгиб, при котором мал не только тензор деформации, но и абсолютная величина смещений точек стержня. Выберем систему координат с началом в некоторой точке нейтральной поверхности внутри рассматриваемого участка стержня. Ось  $z$  направим параллельно оси стержня (недеформированного); изгиб пусть происходит в плоскости  $z, x$ . При слабом изгибании стержня можно считать, что изгиб происходит в одной плоскости. Это связано с известным из дифференциальной геометрии обстоятельством, что отклонение слабо изогнутой кривой от плоскости (так называемое ее кручение) является малой величиной высшего порядка по сравнению с кривизной.

Аналогично тому, что мы имели в случае изгиба пластинок и кручения стержней, и при изгибе тонких стержней внешние силы, действующие на боковую поверхность стержня, малы по сравнению с возникающими внутри стержня напряжениями, и при определении граничных условий на этой поверхности их