5. То же для цилиндрической трубы (внутренний и внешний радиусы R_1 и R_2).

Решение. Функция

$$\chi = {}^1/_4\,(R_2^2 - r^2)$$

(в полярных координатах) удовлетворяет условию (16,13) на обеих границах кольцевого сечения трубы. По формуле (16,17) найдем

$$C = \frac{\pi}{2}\mu\,(R_2^4 - R_1^4).$$

6. То же для тонкостенной трубы произвольного сечения.

Решение. Ввиду тонкости стенки трубы можно считать, что на протяжении ее ширины h функция χ меняется от нуля на одной стороне до χ_1 на другой по линейному закону $\chi = \chi_1 y/h$ (y — координата вдоль толщины стенки). Тогда условие (16,13) дает $\chi_1 L/h = S$, где L — длина периметра сечения трубы, а S — охватываемая им площадь. В выражении (16,17) второй член мал по сравнению с первым, и мы получаем

$$C = 4hS^2\mu/L.$$

Если трубу разрезать продольно по одной из ее образующих, то крутильная жесткость резко уменьшается, становясь равной (согласно результату задачи 4) $C = \mu L h^3/3$.

§ 17. Изгиб стержней

В изогнутом стержне в некоторых местах его происходит растяжение, а в других — сжатие. Растянуты линии на выпуклой стороне изогнутого стержня, а на вогнутой стороне происходит сжатие. Как и в случае пластинок, вдоль длины стержня внутри него существует «нейтральная» поверхность, на которой не происходит ни растяжения, ни сжатия. Она отделяет собой области сжатия от областей растяжения.

Начнем с исследования деформации изгиба в небольшом участке длины стержня, в котором изгиб можно считать слабым; под слабым мы понимаем здесь изгиб, при котором мал не только тензор деформации, но и абсолютная величина смещений точек стержня. Выберем систему координат с началом в некоторой точке нейтральной поверхности внутри рассматриваемого участка стержня. Ось z направим параллельно оси стержня (недеформированного); изгиб пусть происходит в плоскости z, x. При слабом изгибании стержня можно считать, что изгиб происходит в одной плоскости. Это связано с известным из дифференциальной геометрии обстоятельством, что отклонение слабо изогнутой кривой от плоскости (так называемое ее кручение) является малой величиной высшего порядка по сравнению с кривизной.

Аналогично тому, что мы имели в случае изгиба пластинок и кручения стержней, и при изгибе тонких стержней внешние силы, действующие на боковую поверхность стержня, малы по сравнению с возникающими внутри стержня напряжениями, и при определении граничных условий на этой поверхности их

можно считать равными нулю. Таким образом, вдоль всей боковой поверхности стержня имеем $\sigma_{ik}n_k = 0$, или, поскольку $n_z = 0$,

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0$$

и аналогично для $i = y, z$. Выберем такую точку на контуре поперечного сечения стержня, в которой нормаль $\mathbf{n}$ направлена параллельно оси x. Другая такая же точка имеется где-нибудь на противоположной стороне контура. В обеих этих точках $n_y = 0$, и из написанного выше равенства имеем $\sigma_{xx} = 0$. Но поскольку самый стержень предполагается тонким, то, если σ_{xx} исчезает на двух сторонах его сечения, оно мало и вдоль всего сечения, так что можно положить $\sigma_{xx} = 0$ во всем стержне. Аналогичным образом убеждаемся в том, что все компоненты тензора напряжений должны быть равными нулю, за исключением только компоненты σ_{zz}. Другими словами, при изгибе тонкого стержня большой является только растягивающая (или сжимающая) компонента тензора внутренних напряжений. Деформация, в которой отлична от нуля только компонента σ_{zz} тензора напряжений, есть не что иное, как деформация простого растяжения или сжатия (§ 5). Таким образом, в каждом элементе объема изгибаемого стержня происходит простое растяжение (или сжатие). Самая величина этого растяжения, конечно, различна в разных точках каждого из поперечных сечений стержня, что и приводит в результате к изгибу всего стержня.

Легко определить величину относительного растяжения в каждой точке стержня. Рассмотрим какой-нибудь элемент длины dz, параллельный оси стержня и находящийся где-нибудь вблизи начала координат. При изгибании стержня длина dz изменится, сделавшись равной dz'. Неизменными остаются только те элементы длины, которые расположены на нейтральной поверхности. Пусть R есть радиус кривизны нейтральной поверхности вблизи начала координат. Длины dz и dz' можно рассматривать как элементы дуги окружностей с радиусами соответственно R и $R + x$, где x — значение координаты x в точке, в которой выбран элемент dz'. Поэтому

$$dz' = \frac{R+x}{R}\,dz = \left(1 + \frac{x}{R}\right)dz.$$

Относительное удлинение равно, следовательно,

$$\frac{dz' - dz}{dz} = \frac{x}{R}.$$

С другой стороны, относительное удлинение элемента длины dz равно компоненте u_{zz} тензора деформации. Следовательно,

$$u_{zz} = \frac{x}{R}. \tag{17,1}$$

Мы можем написать теперь σ_{zz}, воспользовавшись непосредственно соотношением $\sigma_{zz} = Eu_{zz}$, имеющим место при простом растяжении. Таким образом,

$$\sigma_{zz} = \frac{x}{R} E. \tag{17,2}$$

До сих пор еще расположение нейтральной поверхности в изогнутом стержне оставалось неопределенным. Его можно определить из условия, что рассматриваемая нами здесь деформация должна представлять собой чистый изгиб, без какого бы то ни было общего растяжения или сжатия стержня. Для этого полная сила внутренних напряжений, действующая на поперечное сечение стержня, должна быть равной нулю, т. е. должен исчезать интеграл

$$\int \sigma_{zz}\, df,$$

взятый по этой поверхности. В связи с выражением (17,2) для σ_{zz} это приводит к условию

$$\int x\, df = 0. \tag{17,3}$$

С другой стороны, можно ввести понятие о центре инерции сечения стержня, как о центре инерции однородного плоского диска соответствующей формы. Координаты этого центра:

$$\int x\, df \Big/ \int df, \quad \int y\, df \Big/ \int df.$$

Таким образом, условие (17,3) означает, что в системе координат с началом, лежащим на нейтральной поверхности, x-координата центра инерции сечения стержня равна нулю. Другими словами, нейтральная поверхность проходит через центры инерции поперечных сечений стержня.

Помимо u_{zz}, отличны от нуля еще две компоненты тензора деформации, так как при простом растяжении имеем $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$. Зная тензор деформации, легко найти также и смещения точек. Пишем:

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\sigma x}{R},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Интегрирование этих соотношений приводит к следующим выражениям для компонент перемещения:

$$u_x = -\frac{1}{2R}\left[z^2 + \sigma(x^2 - y^2)\right],$$

$$u_y = -\sigma\frac{xy}{R}, \quad u_z = \frac{xz}{R}. \tag{17,4}$$

Постоянные интегрирования положены равными нулю; это значит, что мы закрепляем в пространстве положение начала координат.

Из формул (17,4) видно, что точки, расположенные в поперечном сечении $z = \text{const} \equiv z_0$, после изгиба заполняют поверхность

$$z = z_0 + u_z = z_0\left(1 + \frac{x}{R}\right).$$

Мы видим, что в рассматриваемом приближении сечения остаются при изгибе плоскими, лишь поворачиваясь на некоторый угол относительно своего первоначального положения. Форма же сечения меняется; так при изгибе стержня прямоугольного сечения (со сторонами a и b) боковые стороны контура сечения $y = \pm b/2$ после изгиба занимают положения

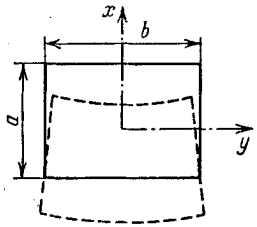

Рис. 14

$$y = \pm\frac{b}{2} + u_y = \pm\frac{b}{2}\left(1 - \frac{\sigma x}{R}\right),$$

т. е. становятся наклонными, оставаясь прямыми. Верхняя же и нижняя стороны $x = \pm a/2$ изгибаются в параболические кривые (рис. 14):

$$x = \pm\frac{a}{2} + u_x = \pm\frac{a}{2} - \frac{1}{2R}\left[z_0^2 + \sigma\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right)\right].$$

Свободная энергия единицы объема стержня:

$$\sigma_{ik}u_{ik}/2 = \sigma_{zz}u_{zz}/2 = Ex^2/2R^2.$$

Интегрируя по всему поперечному сечению стержня, имеем

$$\frac{E}{2R^2}\int x^2\,df. \tag{17,5}$$

Это есть свободная энергия единицы длины изогнутого стержня. Радиус кривизны R определен здесь как радиус кривизны нейтральной поверхности. Но в силу тонкости стержня здесь с той же точностью R можно считать просто радиусом кривизны самого изогнутого стержня, рассматриваемого как не имеющая толщины линия (об этой линии часто говорят как об *упругой линии*).

В выражении (17,5) удобно ввести понятие момента инерции площади поперечного сечения стержня. Именно, определим момент инерции сечения относительно проходящей через его плоскость оси y как интеграл:

$$I_y = \int x^2\,df, \tag{17,6}$$

т. е. аналогично обычному понятию момента инерции с той только разницей, что вместо элемента массы стоит просто элемент по-

верхности df. Тогда свободная энергия единицы длины стержня запишется в виде

$$\frac{E}{2R^2} I_y. \tag{17,7}$$

Определим еще момент сил внутренних напряжений, действующих в данном сечении стержня (этот момент называют изгибающим). К элементу df поверхности сечения приложена сила $\sigma_{zz}\, df = \frac{x}{R} E\, df$, направленная вдоль оси z. Ее момент относительно оси y есть $x\sigma_{zz}\, df$. Поэтому полный момент сил относительно этой оси есть

$$M_y = \frac{E}{R} \int x^2\, df = \frac{EI_y}{R}. \tag{17,8}$$

Таким образом, кривизна $1/R$ упругой линии пропорциональна действующему в данном сечении изгибающему моменту.

Величина I_y зависит от того, как направлена ось y в плоскости сечения. Удобно, как это принято в механике, выражать I_y через два так называемых главных момента инерции. Если θ есть угол между осью y и одной из главных осей инерции сечения стержня, то, как известно,

$$I_y = I_1 \cos^2\theta + I_2 \sin^2\theta, \tag{17,9}$$

где I_1, I_2 — главные моменты инерции. Плоскости, проходящие через ось z и главные оси инерции сечения стержня, называют главными плоскостями изгиба.

Если, например, сечение стержня является прямоугольником (со сторонами a и b), то его центр инерции находится в центре прямоугольника, а главные оси инерции параллельны его сторонам. Главные моменты инерции равны

$$I_1 = a^3b/12, \quad I_2 = ab^3/12. \tag{17,10}$$

При круговом сечении (с радиусом R) центр инерции находится в центре круга, а направление главных осей инерции произвольно. Момент инерции вокруг любой оси, проходящей в плоскости сечения через его центр, равен

$$I = \pi R^4/4. \tag{17,11}$$

§ 18. Энергия деформированного стержня

В предыдущем параграфе мы рассматривали только небольшую область вдоль длины изогнутого стержня. Переходя теперь к исследованию деформации во всем стержне, необходимо начать с выбора подходящего способа описания такой деформации. Существенно, что при сильном [1]) изгибе стержня в нем одновременно

[1]) Напомним, что под сильной мы понимаем здесь такую деформацию, при которой вектор **u** не мал, тензор же деформации по-прежнему является малым.