

верхности df . Тогда свободная энергия единицы длины стержня запишется в виде

$$\frac{E}{2R^2} I_y. \quad (17,7)$$

Определим еще момент сил внутренних напряжений, действующих в данном сечении стержня (этот момент называют изгибающим). К элементу df поверхности сечения приложена сила $\sigma_{zz} df = \frac{x}{R} E df$, направленная вдоль оси z . Ее момент относительно оси y есть $x\sigma_{zz} df$. Поэтому полный момент сил относительно этой оси есть

$$M_y = \frac{E}{R} \int x^2 df = \frac{EI_y}{R}. \quad (17,8)$$

Таким образом, кривизна $1/R$ упругой линии пропорциональна действующему в данном сечении изгибающему моменту.

Величина I_y зависит от того, как направлена ось y в плоскости сечения. Удобно, как это принято в механике, выражать I_y через два так называемых главных момента инерции. Если θ есть угол между осью y и одной из главных осей инерции сечения стержня, то, как известно,

$$I_y = I_1 \cos^2 \theta + I_2 \sin^2 \theta, \quad (17,9)$$

где I_1 , I_2 — главные моменты инерции. Плоскости, проходящие через ось z и главные оси инерции сечения стержня, называют главными плоскостями изгиба.

Если, например, сечение стержня является прямоугольником (со сторонами a и b), то его центр инерции находится в центре прямоугольника, а главные оси инерции параллельны его сторонам. Главные моменты инерции равны

$$I_1 = a^3 b / 12, \quad I_2 = ab^3 / 12. \quad (17,10)$$

При круговом сечении (с радиусом R) центр инерции находится в центре круга, а направление главных осей инерции произвольно. Момент инерции вокруг любой оси, проходящей в плоскости сечения через его центр, равен

$$I = \pi R^4 / 4. \quad (17,11)$$

§ 18. Энергия деформированного стержня

В предыдущем параграфе мы рассматривали только небольшую область вдоль длины изогнутого стержня. Переходя теперь к исследованию деформации во всем стержне, необходимо начать с выбора подходящего способа описания такой деформации. Существенно, что при сильном¹⁾ изгибе стержня в нем одновременно

¹⁾ Напомним, что под сильной мы понимаем здесь такую деформацию, при которой вектор u не мал, тензор же деформации по-прежнему является малым.

возникает, вообще говоря, также и некоторая деформация кручения, так что результирующая деформация есть комбинация чистого изгиба и кручения.

Для описания деформации удобно поступить следующим образом. Разделим весь стержень на ряд бесконечно малых элементов, каждый из которых вырезается из стержня двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. В каждом таком элементе введем свою систему координат ξ, η, ζ ; направления осей выберем таким образом, чтобы в недеформированном стержне все эти системы были параллельны друг другу, причем все оси ζ направлены параллельно оси стержня. При изгибе стержня в каждом элементе система координат поворачивается, причем в различных элементах, вообще говоря, различным образом. Каждые две бесконечно близкие системы оказываются при этом повернутыми друг относительно друга на некоторый бесконечно малый угол.

Пусть $d\phi$ — вектор угла относительного поворота двух систем, находящихся на расстоянии dl вдоль длины стержня (как известно, бесконечно малый угол поворота можно рассматривать как вектор, направленный вдоль оси поворота; его составляющие представляют собою углы поворота вокруг каждой из трех осей координат).

Для описания деформации мы введем вектор

$$\Omega = \frac{d\phi}{dl}, \quad (18,1)$$

определяющий «скорость» поворота осей координат вдоль длины стержня. Если деформация является чистым кручением, то поворот последовательных систем координат происходит только вокруг оси стержня, т. е. вокруг осей ζ . В этом случае, следовательно, вектор Ω направлен вдоль оси стержня и представляет собой не что иное, как угол кручения τ , которым мы пользовались в § 16. Соответственно этому и в общем случае произвольной деформации компоненту Ω_ζ вектора Ω можно назвать углом кручения. При чистом же изгибе стержня в одной плоскости вектор Ω не имеет компоненты Ω_ζ , т. е. лежит в каждой точке целиком в плоскости ξ, η . Если при этом выбрать плоскость, в которой происходит изгиб, в качестве плоскости ξ, ζ , то поворот происходит в каждой точке вокруг оси η , т. е. Ω параллелен оси η .

Введем единичный вектор t , направленный по касательной к стержню, рассматриваемому здесь просто как упругая линия. Производная dt/dl называется вектором кривизны линии; его абсолютная величина равна $1/R$, где R — радиус кривизны¹⁾,

¹⁾ Напомним, что всякая кривая в пространстве характеризуется в каждой точке своими так называемыми кривизной и кручением. Это кручение (нам не придется пользоваться им) не следует смешивать с тем, что мы называем здесь деформацией кручения, представляющей собой закручивание стержня вокруг его оси.

а его направление называется направлением главной нормали кривой. Изменение вектора при бесконечно малом повороте равно векторному произведению вектора угла поворота на сам рассматриваемый вектор. Поэтому для разности векторов \mathbf{t} в двух бесконечно близких точках упругой линии можно написать:

$$d\mathbf{t} = [d\varphi \mathbf{t}],$$

или, разделив на $d\mathbf{t}$:

$$\frac{dt}{dl} = [\Omega \mathbf{t}]. \quad (18,2)$$

Умножив это равенство с обеих сторон векторно на \mathbf{t} , получаем

$$\Omega = \left[\mathbf{t} \frac{dt}{dl} \right] + \mathbf{t} (\mathbf{t} \Omega). \quad (18,3)$$

Направление вектора касательной в каждой точке совпадает с направлением оси ζ в этой же точке. Поэтому $(\mathbf{t}\Omega) = \Omega$. Введя единичный вектор \mathbf{n} главной нормали так, что $dt/dl = \mathbf{n}/R$, можно, следовательно, написать:

$$\Omega = \frac{1}{R} [\mathbf{tn}] + \mathbf{t}\Omega. \quad (18,4)$$

Первый член справа представляет собой вектор с двумя компонентами Ω_ξ , Ω_n . Единичный вектор $[\mathbf{tn}]$ называется, как известно, единичным вектором бинормали. Таким образом, компоненты Ω_ξ , Ω_n образуют вектор, направленный по бинормали к стержню и по абсолютной величине равный его кривизне $1/R$.

Введя, таким образом, вектор Ω , характеризующий деформацию, и выяснив его свойства, мы можем вывести выражение для упругой свободной энергии изогнутого стержня. Упругая энергия (отнесенная к единице длины стержня) является квадратичной функцией деформации, т. е. в данном случае квадратичной функцией компонент вектора Ω . Легко видеть, что в этой квадратичной форме должны отсутствовать члены, пропорциональные $\Omega_\xi \Omega_\zeta$ или $\Omega_n \Omega_\zeta$. Действительно, поскольку стержень однороден вдоль всей своей длины, то все величины, в частности и энергия, не должны меняться при изменении направления положительного отсчета координаты ζ , т. е. при замене ζ на $-\zeta$; указанные же произведения при такой замене переменили бы свой знак.

Что касается члена с квадратом Ω_ζ^2 , то надо помнить, что при $\Omega_\xi = \Omega_n = 0$ мы имеем дело с чистым кручением, и тогда выражение для энергии должно совпасть с выражением, полученным в § 16. Таким образом, соответствующий член в свободной энергии имеет вид

$$\frac{1}{2} C \Omega_\zeta^2.$$

Наконец, члены, квадратичные по Ω_ξ , Ω_n , можно написать, исходя из выражения (17,7) для энергии слабо изогнутого неболь-

шего участка стержня. Предположим, что стержень подвергается лишь слабому изгибу. Плоскость ξ , η выберем в плоскости изгиба так, что компонента Ω_ξ исчезает; кручение также отсутствует при слабом изгибе. Выражение для энергии должно в этом случае совпадать с (17,7):

$$\frac{E}{2R^2} I_\eta.$$

Но мы видели, что $1/R^2$ является как раз квадратом плоского вектора (Ω_ξ , Ω_η). Поэтому энергия должна иметь вид

$$\frac{E}{2} I_\eta \Omega_\eta^2.$$

При произвольном выборе осей ξ , η это выражение напишется, как известно из механики, в виде

$$\frac{E}{2} (I_{\eta\eta} \Omega_\eta^2 + 2I_{\eta\xi} \Omega_\eta \Omega_\xi + I_{\xi\xi} \Omega_\xi^2),$$

где $I_{\eta\eta}$, $I_{\eta\xi}$, $I_{\xi\xi}$ — компоненты тензора инерции сечения стержня. Удобно выбрать оси ξ , η так, чтобы они совпали с главными осями инерции сечения стержня. Тогда мы будем иметь просто

$$\frac{E}{2} (I_1 \Omega_\xi^2 + I_2 \Omega_\eta^2),$$

где I_1 , I_2 — главные моменты инерции сечения. Поскольку коэффициенты при Ω_ξ^2 и Ω_η^2 постоянные, то полученное выражение должно иметь место и при сильном изгибе.

Наконец, интегрируя по всей длине стержня, получим окончательно следующее выражение для свободной упругой энергии изогнутого стержня:

$$F_{ct} = \int \left\{ \frac{I_1 E}{2} \Omega_\xi^2 + \frac{I_2 E}{2} \Omega_\eta^2 + \frac{C}{2} \Omega_\zeta^2 \right\} dl. \quad (18,5)$$

Далее, выразим через Ω момент сил, действующих на сечение стержня. Это легко сделать, используя опять результаты, полученные ранее для чистого кручения и слабого чистого изгиба. При чистом кручении момент сил относительно оси стержня равен Ct . Поэтому заключаем, что в общем случае момент M_ζ относительно оси ζ должен быть равен $M_\zeta = C\Omega_\zeta$. Далее, при слабом изгибе в плоскости ξ , ζ момент относительно оси η есть EI_2/R . Но при таком изгибе вектор Ω направлен по оси η , так что $1/R$ есть просто его абсолютная величина и $EI_2/R = EI_2\Omega$. Поэтому заключаем, что в общем случае должно быть $M_\xi = EI_1\Omega_\xi$, $M_\eta = EI_2\Omega_\eta$ (оси ξ , η выбраны по главным осям инерции сечения). Таким образом, компоненты вектора M момента сил равны

$$M_\xi = EI_1\Omega_\xi, \quad M_\eta = EI_2\Omega_\eta, \quad M_\zeta = C\Omega_\zeta. \quad (18,6)$$

Упругая энергия (18,5), выраженная через момент сил, имеет вид

$$F_{\text{ст}} = \int \left\{ \frac{M_\xi^2}{2I_1 E} + \frac{M_\eta^2}{2I_2 E} + \frac{M_\zeta^2}{2C} \right\} dl. \quad (18,7)$$

Важным случаем изгиба стержней является слабый изгиб, при котором на всем протяжении стержня отклонение его от первоначального положения мало по сравнению с длиной стержня. В этом случае кручение можно считать отсутствующим, так что можно положить $\Omega_\zeta = 0$ и из (18,4) имеем просто

$$\Omega = \frac{1}{R} [tn] \equiv \left[t \frac{dt}{dl} \right]. \quad (18,8)$$

Введем неподвижную в пространстве систему координат x, y, z с осью z вдоль оси недеформированного стержня (вместо связанных в каждой точке со стержнем координат ξ, η, ζ). Обозначим посредством X, Y координаты x, y точек упругой линии стержня; X и Y определяют смещение точек линии от их первоначального положения до изгиба.

Ввиду того что изгиб slab, вектор касательной t почти параллелен оси z , так что приближенно можно считать его направленным вдоль этой оси. Далее, единичный вектор касательной равен производной

$$t = \frac{dr}{dl}$$

от радиус-вектора r точек кривой по ее длине. Поэтому имеем

$$\frac{dt}{dl} = \frac{d^2r}{dl^2} \approx \frac{d^2r}{dz^2}$$

(производную по длине стержня можно приближенно заменить производной по z). В частности, x - и y -компоненты этого вектора равны соответственно d^2X/dz^2 и d^2Y/dz^2 . Компоненты Ω_ξ, Ω_η с той же точностью равны теперь компонентам Ω_x, Ω_y , и из (18,8) получаем

$$\Omega_\xi = - \frac{d^2Y}{dz^2}, \quad \Omega_\eta = \frac{d^2X}{dz^2}. \quad (18,9)$$

Подставляя эти выражения в (18,5), получаем упругую энергию слабо изогнутого стержня в виде

$$F_{\text{ст}} = \frac{E}{2} \int \left\{ I_1 \left(\frac{d^2Y}{dz^2} \right)^2 + I_2 \left(\frac{d^2X}{dz^2} \right)^2 \right\} dz. \quad (18,10)$$

Напомним, что I_1, I_2 — моменты инерции соответственно относительно осей x, y , являющихся главными осями инерции.

В частности, для стержня кругового сечения $I_1 = I_2 \equiv I$ и в подынтегральном выражении получается просто сумма ква-

дратов вторых производных, совпадающая в рассматриваемом приближении с квадратом кривизны стержня:

$$\left(\frac{d^2X}{dz^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{dz^2} \right)^2 \approx \frac{1}{R^2}.$$

Ввиду этого формулу (18,10) можно естественным образом обобщить для слабого изгиба стержней (кругового сечения), имеющих в своем естественном (недеформированном) состоянии любую непрямолинейную форму. Для этого надо написать энергию изгиба в виде

$$F_{\text{ст}} = \frac{EI}{2} \int \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)^2 dz, \quad (18,11)$$

где R_0 — радиус естественной кривизны стержня в каждой его точке. Это выражение, как и должно быть, обладает минимумом в недеформированном состоянии ($R = R_0$), а при $R_0 \rightarrow \infty$ переходит в формулу (18,10).

§ 19. Уравнения равновесия стержней

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений равновесия изогнутых стержней. Рассмотрим опять какой-нибудь из бесконечно малых элементов стержня, вырезанный двумя бесконечно близкими сечениями, и вычислим полную действующую на него силу. Обозначим силу внутренних напряжений, приложенную к площади сечения стержня, посредством \mathbf{F} ¹⁾. Компоненты этого вектора равны интегралам от σ_{iz} по площади сечения:

$$F_i = \int \sigma_{iz} df. \quad (19,1)$$

Если рассматривать два бесконечно близких сечения как поверхности оснований вырезаемого ими элемента стержня, то на верхнее основание действует сила $\mathbf{F} + d\mathbf{F}$, а на нижнее — сила $-\mathbf{F}$; их сумма есть дифференциал $d\mathbf{F}$. Пусть далее \mathbf{K} есть действующая на стержень внешняя сила, отнесенная к единице его длины. Тогда на элемент длины dl действует внешняя сила $\mathbf{K} dl$. Равнодействующая всех сил, действующих на этот элемент, есть, следовательно, $d\mathbf{F} + \mathbf{K} dl$. В равновесии эта сила должна обращаться в нуль. Таким образом, получаем

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl} = -\mathbf{K}. \quad (19,2)$$

Второе уравнение получается из условия равенства нулю полного момента сил, приложенных к данному элементу. Пусть M есть момент сил внутренних напряжений, действующих на пло-

¹⁾ Обозначение этой силы посредством \mathbf{F} не может привести к смешению со свободной энергией, которой мы не пользуемся ниже, в §§ 19—21.