дратов вторых производных, совпадающая в рассматриваемом приближении с квадратом кривизны стержня:

$$\left(\frac{d^2X}{dz^2}\right)^2+\left(\frac{d^2Y}{dz^2}\right)^2\approx\frac{1}{R^2}.$$

Ввиду этого формулу (18,10) можно естественным образом обобщить для слабого изгиба стержней (кругового сечения), имеющих в своем естественном (недеформированном) состоянии любую непрямолинейную форму. Для этого надо написать энергию изгиба в виде

$$F_{\text{ст}}=\frac{El}{2}\int\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)^2dz, \tag{18,11}$$

где R_0 — радиус естественной кривизны стержня в каждой его точке. Это выражение, как и должно быть, обладает минимумом в недеформированном состоянии ($R=R_0$), а при $R_0\to\infty$ переходит в формулу (18,10).

§ 19. Уравнения равновесия стержней

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений равновесия изогнутых стержней. Рассмотрим опять какой-нибудь из бесконечно малых элементов стержня, вырезанный двумя бесконечно близкими сечениями, и вычислим полную действующую на него силу. Обозначим силу внутренних напряжений, приложенную к площади сечения стержня, посредством $\mathbf{F}$ [1]). Компоненты этого вектора равны интегралам от $\sigma_{i\zeta}$ по площади сечения:

$$F_i=\int\sigma_{i\zeta}df. \tag{19,1}$$

Если рассматривать два бесконечно близких сечения как поверхности оснований вырезаемого ими элемента стержня, то на верхнее основание действует сила $\mathbf{F}+d\mathbf{F}$, а на нижнее — сила $-\mathbf{F}$; их сумма есть дифференциал $d\mathbf{F}$. Пусть далее $\mathbf{K}$ есть действующая на стержень внешняя сила, отнесенная к единице его длины. Тогда на элемент длины dl действует внешняя сила $\mathbf{K}\,dl$. Равнодействующая всех сил, действующих на этот элемент, есть, следовательно, $d\mathbf{F}+\mathbf{K}\,dl$. В равновесии эта сила должна обращаться в нуль. Таким образом, получаем

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl}=-\mathbf{K}. \tag{19,2}$$

Второе уравнение получается из условия равенства нулю полного момента сил, приложенных к данному элементу. Пусть $\mathbf{M}$ есть момент сил внутренних напряжений, действующих на пло-

[1]) Обозначение этой силы посредством $\mathbf{F}$ не может привести к смешению со свободной энергией, которой мы не пользуемся ниже, в §§ 19—21.

щадь сечения стержня. Этот момент берется относительно точки (начала координат), лежащей в самой плоскости этого сечения; его компоненты определяются формулами (18,6). Будем вычислять суммарный момент, приложенный к данному элементу стержня, относительно точки (назовем ее точкой O), лежащей в плоскости его верхнего основания. Тогда внутренние напряжения на этом основании дают момент $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$. Момент же (относительно O) сил внутренних напряжений в нижнем основании элемента складывается из момента $-\mathbf{M}$ этих сил относительно начала координат в плоскости нижнего основания (точка O') и момента (относительно O) суммарной силы $-\mathbf{F}$, действующей на этом основании. Этот второй момент равен $[(-d\mathbf{l})(-\mathbf{F})]$, где $d\mathbf{l}$ — вектор элемента длины стержня от O' к O. Момент же, обусловленный внешними силами $\mathbf{K}$, является малой величиной высшего порядка. Таким образом, полный действующий на элемент стержня момент сил есть $d\mathbf{M} + [d\mathbf{l}\mathbf{F}]$. В равновесии он должен быть равным нулю:

$$d\mathbf{M} + [d\mathbf{l}\mathbf{F}] = 0.$$

Разделив это равенство на dl и замечая, что $d\mathbf{l}/dl = \mathbf{t}$ есть единичный вектор касательной к стержню (рассматриваемому как линия), получаем уравнение

$$\frac{d\mathbf{M}}{dl} = [\mathbf{F}\mathbf{t}]. \tag{19,3}$$

Уравнения (19,2) и (19,3) представляют собой полную систему уравнений равновесия произвольным образом изогнутого стержня.

Если действующие на стержень внешние силы являются, как говорят, сосредоточенными, т. е. приложены только к отдельным изолированным его точкам, то на участках стержня между точками приложения сил уравнения равновесия заметно упрощаются. Из (19,2) имеем при $\mathbf{K} = 0$

$$\mathbf{F} = \text{const}, \tag{19,4}$$

т. е. силы внутренних напряжений постоянны вдоль длины каждого из указанных участков стержня. Значения этих постоянных определяются тем, что разность $\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$ значений силы в точках *1* и *2* равна

$$\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = -\sum \mathbf{K}, \tag{19,5}$$

где сумма берется по всем силам, приложенным к отрезку стержня между точками *1* и *2*. Обращаем внимание на то, что в разности $\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$ точка *2* является более удаленной от начала отсчета длины стержня (т. е. длины дуги l), чем точка *1*; это замечание существенно при определении знаков в равенстве (19,5). В частности, если на стержень действует всего одна сосредоточенная сила $\mathbf{f}$, приложенная к его свободному концу, то $\mathbf{F}$ постоянно вдоль всей длины стержня и равно $\mathbf{f}$.

Второе уравнение равновесия (19,3) тоже упрощается. Написав в нем $\mathbf{t} = d\mathbf{l}/dl = d\mathbf{r}/dl$ (где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор от некоторой заданной точки к произвольной точке стержня) и интегрируя, получаем ввиду постоянства $\mathbf{F}$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{F}\mathbf{r}] + \text{const}. \tag{19,6}$$

Если же отсутствуют также и сосредоточенные силы, а изгиб стержня происходит под действием приложенных к нему сосредоточенных моментов (т. е. сосредоточенных пар сил), то $\mathbf{F} = \text{const}$ вдоль всей длины стержня, а $\mathbf{M}$ испытывает в точках приложения сосредоточенных пар скачки, равные их моментам.

Обратимся, далее, к вопросу о граничных условиях на концах изгибаемого стержня. Здесь могут представиться различные случаи.

Конец стержня называют заделанным (рис. 4, *а* см. с. 66), если он не может испытывать никаких смещений — ни продольных, ни поперечных, и, сверх того, не может измениться его направление (т. е. направление касательной к стержню в его конце). В этом случае граничные условия заключаются в том, что задаются координаты конца стержня и единичный вектор касательной $\mathbf{t}$ к нему. Сила же и момент сил реакции, действующие на стержень со стороны опоры в точке закрепления, определяются в результате решения уравнений.

Противоположным является случай свободного конца стержня. В этом случае координаты конца и его направление произвольны. Граничные условия заключаются в том, что сила $\mathbf{F}$ и момент сил $\mathbf{M}$ на конце стержня должны обратиться в нуль [1]).

Если конец стержня закреплен на шарнире, то он не может испытывать никаких смещений, но его направление не задано. Момент сил, действующих на такой свободно поворачивающийся конец, должен исчезать.

Наконец, если стержень оперт в некоторой точке опоры (рис. 4, *б*), то он может скользить по этой точке, но не может испытывать в ней поперечных смещений. В этом случае незаданными являются направление $\mathbf{t}$ и положение точки, в которой опирается стержень, по его длине. Момент сил в точке опоры должен быть равным нулю соответственно тому, что стержень может свободно поворачиваться, а сила $\mathbf{F}$ в этой точке должна быть перпендикулярна к стержню; продольная компонента силы вызвала бы дальнейшее его скольжение в точке опоры.

Аналогичным образом легко установить граничные условия и при других способах закрепления стержня. Мы не будем останавливаться здесь на этом, ограничившись приведенными типичными примерами.

---

[1]) Если к свободному концу приложена сосредоточенная сила $\mathbf{f}$, то граничное условие гласит не $\mathbf{F} = 0$, а $\mathbf{F} = \mathbf{f}$.

Уже в начале предыдущего параграфа было отмечено, что сильный изгиб стержня произвольного сечения сопровождается, вообще говоря, одновременным его кручением, даже если к стержню не прилагается никаких внешних крутящих моментов. Исключением является изгиб стержня в его главных плоскостях. При таком изгибе кручение не возникает. У стержня кругового сечения никакой изгиб не сопровождается кручением (если, конечно, нет внешних крутящих моментов). В этом можно убедиться следующим образом. Кручение определяется компонентой $\Omega_\zeta = (\mathbf{\Omega t})$ вектора $\mathbf{\Omega}$. Вычислим его производную по длине стержня. Для этого пишем, замечая, что $\Omega_\zeta = M_\zeta/C$:

$$\frac{d}{dl}(\mathbf{Mt}) = C\frac{d\Omega_\zeta}{dl} = \frac{d\mathbf{M}}{dl}\mathbf{t} + \mathbf{M}\frac{d\mathbf{t}}{dl}.$$

При подстановке (19,3) первый член обращается в нуль, так что

$$C\frac{d\Omega_\zeta}{dl} = \mathbf{M}\frac{d\mathbf{t}}{dl}.$$

У стержня кругового сечения $I_1 = I_2 \equiv I$; согласно (18,3) и (18,6) можно поэтому написать $\mathbf{M}$ в виде

$$\mathbf{M} = EI\left[\mathbf{t}\frac{d\mathbf{t}}{dl}\right] + \mathbf{t}C\Omega_\zeta. \tag{19,7}$$

При умножении на $d\mathbf{t}/dl$ оба члена дают нуль, так что $d\Omega_\zeta/dl = 0$, откуда

$$\Omega_\zeta = \text{const}, \tag{19,8}$$

т. е. угол кручения постоянен вдоль стержня. Если к концам стержня не приложено крутящих моментов, то $\mathbf{\Omega}_\zeta$ на концах равно нулю, а потому кручение отсутствует и по всей длине стержня.

Для стержня кругового сечения можно, таким образом, написать при чистом изгибе

$$\mathbf{M} = EI\left[\mathbf{t}\frac{d\mathbf{t}}{dl}\right] = EI\left[\frac{d\mathbf{r}}{dl}\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}\right]. \tag{19,9}$$

Подстановка этого выражения в (19,3) приводит к уравнению чистого изгиба стержней кругового сечения в виде

$$EI\left[\frac{d\mathbf{r}}{dl}\frac{d^3\mathbf{r}}{dl^3}\right] = \left[\mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dl}\right]. \tag{19,10}$$

Задачи

1. Привести к квадратурам задачу об определении формы стержня кругового сечения (упругого прута), сильно изогнутого в одной плоскости приложенными к нему сосредоточенными силами.

Решение. Рассматриваем участок стержня между точками приложения сил; на таком участке $\mathbf{F} = \text{const}$. Выберем плоскость изгиба в качестве плоскости x, y, а ось y — параллельно силе $\mathbf{F}$. Вводим угол θ между касательной к линии стержня и осью y. Тогда $dx/dl = \sin\theta$, $dy/dl = \cos\theta$, где x, y — коор.

динаты точек стержня. Раскрывая векторные произведения в (19,10), получаем уравнение для θ как функции длины дуги l

$$IE\frac{d^2\theta}{dl^2} - F\sin\theta = 0.$$

Первое интегрирование дает

$$\frac{IE}{2}\left(\frac{d\theta}{dl}\right)^2 + F\cos\theta = c_1$$

и отсюда

$$l = \pm\sqrt{\frac{IE}{2}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{c_1 - F\cos\theta}} + c_2. \tag{1}$$

Функция $\theta(l)$ может быть выражена отсюда через эллиптические функции. Для координат $x = \int\sin\theta\,dl$, $y = \int\cos\theta\,dl$ получаем

$$x = \pm\frac{1}{F}\sqrt{2IE}\sqrt{c_1 - F\cos\theta} + \text{const},$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{IE}{2}}\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{c_1 - F\cos\theta}} + \text{const}'. \tag{2}$$

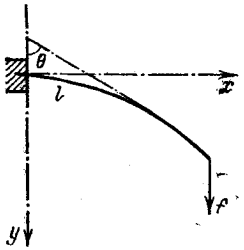

Рис. 15

Момент $\mathbf{M}$ (19,9) направлен по оси z и равен

$$M = IE\frac{d\theta}{dl}.$$

2. Определить форму сильно изогнутого стержня, один конец которого заделан, а к другому, свободному, приложена сила $\mathbf{f}$; направление $\mathbf{f}$ перпендикулярно к прямой недеформированного стержня (рис. 15).

Решение. На всей длине стержня $F = \text{const} = f$. На заделанном конце ($l = 0$) $\theta = \pi/2$, а на свободном ($l = L$, где L — длина стержня) $M = 0$, т. е. $\theta' = 0$. Вводя обозначение $\theta_0 = \theta(L)$, имеем в (1) $c_1 = f\cos\theta_0$:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}}\int_{\theta}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

Отсюда получаем уравнение, определяющее θ_0:

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

Форма стержня определяется формулами

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}}\left(\sqrt{\cos\theta_0} - \sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}\right), \quad y = \sqrt{\frac{IE}{2f}}\int_{\theta}^{\pi/2}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

3. То же, если сила $\mathbf{f}$, приложенная к свободному концу, направлена параллельно линии недеформированного стержня.

Решение. Имеем $\mathbf{F} = -\mathbf{f}$ (оси координат выбраны указанным на рис. 16 образом). Граничные условия: $\theta = 0$ при $l = 0$, $\theta' = 0$ при $l = L$. Имеем

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

где θ_0 определяется из $l(\theta_0) = L$. Для x и y получаем

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} \left(\sqrt{1 - \cos\theta_0} - \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}\right),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^\theta \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

При слабом изгибе $\theta_0 \ll 1$ и можно написать:

$$L \approx \sqrt{\frac{IE}{f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{IE}{f}},$$

т. е. θ_0 выпадает из этого соотношения. Это показывает, в согласии с результатом задачи 3 § 21, что рассматриваемое решение существует только при $f \geqslant \pi^2 IE/4L^2$, т. е. после потери устойчивости прямолинейной формой.

4. То же, если оба конца стержня оперты, а к его середине приложена сила $\mathbf{f}$; расстояние между точками опоры есть L_0.

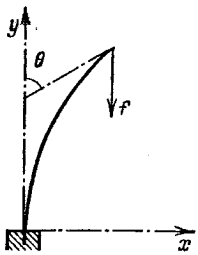

Рис. 16

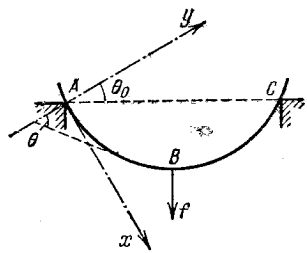

Рис. 17

Решение. Выбираем оси координат указанным на рис. 17 образом. Сила $\mathbf{F}$ постоянна на каждом из участков AB и BC, причем на каждом из них перпендикулярна к линии стержня в точках опоры — соответственно A и C. Разность значений $\mathbf{F}$ на AB и BC равна $\mathbf{f}$, откуда заключаем, что на AB $F \sin\theta_0 = -f/2$, где θ_0 — угол между осью y и линией AC. В точке A ($l = 0$) имеем условия $\theta = \pi/2$ и $M = 0$, т. е. $\theta' = 0$, так что на AB

$$l = \left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\right)^{1/2} \int_\theta^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}},$$

$$x = 2\left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\cos\theta\right)^{1/2}, \quad y = \left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\right)^{1/2} \int_\theta^{\pi/2} \sqrt{\cos\theta}\, d\theta.$$

Угол θ_0 определяется из условия, что проекция длины AB на прямую AC должна быть равна $L_0/2$, откуда имеем

$$\frac{L_0}{2} = \left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\right)^{1/2} \int\limits_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta-\theta_0)}{\sqrt{\sin\theta}}\,d\theta.$$

При некотором определенном значении θ_0, лежащем между 0 и $\pi/2$, производная $df/d\theta_0$ (где f рассматривается как функция от θ_0) обращается в нуль и делается положительной. Дальнейшему уменьшению θ_0, т. е. увеличению прогиба, соответствовало бы уменьшение f. Это значит, что найденное решение делается неустойчивым; стержень «проваливается» между опорами.

5. Привести к квадратурам задачу о пространственном сильном изгибе стержня под действием сосредоточенных сил.

Решение. Рассматриваем участок стержня между точками приложения сил, на котором $\mathbf{F} = \text{const}$. Интегрируя (19,10), получаем

$$EI\left[\frac{d\mathbf{r}}{dl}\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}\right] = [\mathbf{Fr}] + c\mathbf{F}; \tag{1}$$

постоянная интегрирования написана в виде вектора $c\mathbf{F}$, направленного вдоль $\mathbf{F}$, поскольку надлежащим выбором начала координат, т. е. прибавлением к $\mathbf{r}$ некоторого постоянного вектора, можно исключить аддитивный вектор, перпендикулярный к $\mathbf{F}$. Умножая (1) скалярно и векторно на $\mathbf{r}'$ (штрих означает дифференцирование по l) и замечая, что $\mathbf{r}'\mathbf{r}'' = 0$ (поскольку $\mathbf{r}'^2 = 1$), получаем

$$\mathbf{F}[\mathbf{rr}'] + c\mathbf{Fr}' = 0, \quad EI\mathbf{r}'' = [[\mathbf{Fr}]\,\mathbf{r}'] + c\,[\mathbf{Fr}'].$$

В компонентах (ось z выбрана по направлению $\mathbf{F}$)

$$(xy' - yx') + cz' = 0, \quad EIz'' = -F(xx' + yy').$$

Вводя в этих уравнениях цилиндрические координаты r, φ, z, получаем

$$r^2\varphi' + cz' = 0, \quad EIz'' = -Frr'. \tag{2}$$

Из второго уравнения имеем

$$z' = \frac{F}{2EI}(A - r^2), \tag{3}$$

где A — постоянная. Комбинируя (2) и (3) с тождеством

$$r'^2 + r^2\varphi'^2 + z'^2 = 1,$$

получаем

$$dl = \frac{r\,dr}{G(r)}, \quad G(r) = \left[r^2 - \frac{F^2}{4E^2I^2}(r^2 + c^2)(A - r^2)^2\right]^{1/2},$$

после чего из (2) и (3) находим

$$z = \frac{F}{2EI}\int \frac{(A - r^2)\,r}{G(r)}\,dr, \quad \varphi = -\frac{cF}{2EI}\int \frac{A - r^2}{rG(r)}\,dr,$$

чем и определяется форма изогнутого стержня.

6. Стержень кругового сечения подвергнут кручению (угол кручения τ) и изогнут в винтовую линию. Определить силу и момент сил, которые должны быть приложены к концам стержня для того, чтобы удерживать его в таком состоянии.

Решение. Пусть R — радиус цилиндра, на поверхности которого навита винтовая линия (ось z выбираем по оси этого цилиндра), а α — угол между ка-

сательной к линии и плоскостью, перпендикулярной к оси z; шаг винтовой линии h связан с α и R посредством $h = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha$. Уравнения винтовой линии:

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = \varphi R \operatorname{tg} \alpha$$

(φ — угол поворота вокруг оси z); элемент длины дуги $dl = R\, d\varphi/\cos \alpha$. Подставляя эти выражения в (19,7), вычисляем компоненты вектора **M**, а затем по формуле (19,3) — силу **F** (постоянную вдоль всей длины стержня). В результате находим, что сила **F** направлена по оси z и равна

$$F_z = F = C\tau \frac{\sin \alpha}{R} - \frac{EI}{R^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

Момент **M** имеет составляющую по оси z:

$$M_z = C\tau \sin \alpha + \frac{EI}{R} \cos^3 \alpha$$

и составляющую M_φ, направленную в каждой точке стержня по касательной к окружности поперечного сечения цилиндра, равную $M_\varphi = FR$.

7. Определить форму гибкой нити (сопротивлением которой на изгиб можно пренебречь по сравнению с сопротивлением на растяжение), подвешенной за две точки в поле тяжести.

Решение. Выбираем плоскость, в которой расположена нить, в качестве плоскости x, y с осью y, направленной вертикально вниз. В уравнении (19,3) можно пренебречь членом $d\mathbf{M}/dl$, поскольку **M** пропорционально EI. Тогда $[\mathbf{Ft}] = 0$, т. е. **F** направлено в каждой точке нити по **t** и можно написать $\mathbf{F} = F\mathbf{t}$. Уравнение (19,2) дает теперь

$$\frac{d}{dl}\left(F \frac{dx}{dl}\right) = 0, \quad \frac{d}{dl}\left(F \frac{dy}{dl}\right) = q$$

(q — вес единицы длины нити), откуда

$$F \frac{dx}{dl} = c, \quad F \frac{dy}{dl} = ql.$$

Отсюда имеем $F = \sqrt{c^2 + q^2 l^2}$, так что

$$\frac{dx}{dl} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + l^2}}, \quad \frac{dy}{dl} = \frac{l}{\sqrt{A^2 + l^2}}$$

(где $A = c/q$). Интегрирование дает

$$x = A \operatorname{Arsh} \frac{l}{A}, \quad y = \sqrt{A^2 + l^2},$$

откуда

$$y = A \operatorname{ch} \frac{x}{A},$$

т. е. нить имеет форму цепной линии. Выбор начала координат и постоянная A определяются тем, что кривая должна пройти через две заданные точки и должна иметь заданную длину.

§ 20. Слабый изгиб стержней

Уравнения равновесия значительно упрощаются в практически важном случае слабого изгиба стержней. Изгиб является слабым, если направление касательной **t** к стержню медленно меняется