сательной к линии и плоскостью, перпендикулярной к оси z; шаг винтовой линии h связан с α и R посредством $h = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha$. Уравнения винтовой линии:

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = \varphi R \operatorname{tg} \alpha$$

(φ — угол поворота вокруг оси z); элемент длины дуги $dl = R\, d\varphi/\cos \alpha$. Подставляя эти выражения в (19,7), вычисляем компоненты вектора **M**, а затем по формуле (19,3) — силу **F** (постоянную вдоль всей длины стержня). В результате находим, что сила **F** направлена по оси z и равна

$$F_z = F = C\tau \frac{\sin \alpha}{R} - \frac{EI}{R^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

Момент **M** имеет составляющую по оси z:

$$M_z = C\tau \sin \alpha + \frac{EI}{R} \cos^3 \alpha$$

и составляющую M_φ, направленную в каждой точке стержня по касательной к окружности поперечного сечения цилиндра, равную $M_\varphi = FR$.

7. Определить форму гибкой нити (сопротивлением которой на изгиб можно пренебречь по сравнению с сопротивлением на растяжение), подвешенной за две точки в поле тяжести.

Решение. Выбираем плоскость, в которой расположена нить, в качестве плоскости x, y с осью y, направленной вертикально вниз. В уравнении (19,3) можно пренебречь членом $d\mathbf{M}/dl$, поскольку **M** пропорционально EI. Тогда $[\mathbf{Ft}] = 0$, т. е. **F** направлено в каждой точке нити по **t** и можно написать $\mathbf{F} = F\mathbf{t}$. Уравнение (19,2) дает теперь

$$\frac{d}{dl}\left(F \frac{dx}{dl}\right) = 0, \quad \frac{d}{dl}\left(F \frac{dy}{dl}\right) = q$$

(q — вес единицы длины нити), откуда

$$F \frac{dx}{dl} = c, \quad F \frac{dy}{dl} = ql.$$

Отсюда имеем $F = \sqrt{c^2 + q^2 l^2}$, так что

$$\frac{dx}{dl} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + l^2}}, \quad \frac{dy}{dl} = \frac{l}{\sqrt{A^2 + l^2}}$$

(где $A = c/q$). Интегрирование дает

$$x = A \operatorname{Arsh} \frac{l}{A}, \quad y = \sqrt{A^2 + l^2},$$

откуда

$$y = A \operatorname{ch} \frac{x}{A},$$

т. е. нить имеет форму цепной линии. Выбор начала координат и постоянная A определяются тем, что кривая должна пройти через две заданные точки и должна иметь заданную длину.

§ 20. Слабый изгиб стержней

Уравнения равновесия значительно упрощаются в практически важном случае слабого изгиба стержней. Изгиб является слабым, если направление касательной **t** к стержню медленно меняется

вдоль его длины, т. е. производная $d\mathbf{t}/dl$ мала. Другими словами, радиус кривизны изогнутого стержня в каждой точке должен быть велик по сравнению с длиной стержня. Практически это условие сводится к требованию малости поперечного прогиба стержня по сравнению с его длиной. Подчеркнем, что при этом отнюдь не требуется малости прогиба по сравнению с толщиной стержня, как это должно было быть в приближенной теории слабого изгиба пластинок, развитой в §§ 11—12 [1]).

Продифференцируем (19,3) по длине:

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{dl^2} = \left[\frac{d\mathbf{F}}{dl}\mathbf{t}\right] + \left[\mathbf{F}\frac{d\mathbf{t}}{dl}\right]. \tag{20,1}$$

Второй член содержит малую величину $\frac{d\mathbf{t}}{dl}$, вследствие чего им обычно (за исключением некоторых особых случаев, о которых речь идет ниже) можно пренебречь. Подставляя в первом члене $d\mathbf{F}/dl = -\mathbf{K}$, получаем уравнение равновесия в виде

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{dl^2} = [\mathbf{t}\mathbf{K}]. \tag{20,2}$$

Напишем это уравнение в компонентах, для чего подставим в него, согласно (18,6) и (18,9),

$$M_x = -EI_1Y'', \quad M_y = EI_2X'', \quad M_z = 0 \tag{20,3}$$

(знак $'$ означает везде дифференцирование по z). Единичный вектор $\mathbf{t}$ можно считать направленным по оси z. Тогда мы получим

$$EI_2X'''' - K_x = 0, \quad EI_1Y'''' - K_y = 0. \tag{20,4}$$

Эти уравнения определяют зависимость прогибов X и Y от z, т. е. форму слабо изогнутого стержня.

Силу $\mathbf{F}$ внутренних напряжений, действующую на поперечное сечение стержня, также можно выразить через производные от X и Y. Подставляя (20,3) в (19,3), получаем

$$F_x = -EI_2X''', \quad F_y = -EI_1Y'''. \tag{20,5}$$

Мы видим, что вторые производные определяют момент сил внутренних напряжений, а третьи производные определяют сами эти силы. Силу (20,5) называют *перерезывающей силой*. Если изгиб производится сосредоточенными силами, то перерезывающая сила постоянна вдоль каждого из отрезков стержня между точками приложения сил, а в каждой из этих точек испытывает скачок, равный приложенной внешней силе.

---

[1]) Мы не излагаем вовсе сложной теории изгиба стержней, которые в своем естественном, недеформированном, состоянии имеют изогнутую форму (ограничиваясь лишь одним простым примером в задачах 8, 9 этого параграфа).

Величины EI_2 и EI_1 называют жесткостью стержня на изгиб соответственно в главных плоскостях x, z и y, z [1]).

Если приложенные к стержню внешние силы действуют в одной плоскости, то и изгиб стержня произойдет в одной плоскости. Эти две плоскости, однако, в общем случае не совпадают друг с другом; легко найти угол между ними. Если α — угол между плоскостью действия сил и первой главной плоскостью изгиба (плоскостью x, z), то уравнения равновесия принимают вид

$$X'''' = \frac{\cos\alpha}{I_2 E} K, \qquad Y'''' = \frac{\sin\alpha}{I_1 E} K.$$

Оба уравнения отличаются только коэффициентом при K. Поэтому X и Y пропорциональны друг другу, причем

$$Y = X \frac{I_2}{I_1} \operatorname{tg}\alpha.$$

Угол θ между плоскостью изгиба и плоскостью x, z определяется равенством

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{I_2}{I_1} \operatorname{tg}\alpha. \tag{20,6}$$

Для стержня кругового сечения $I_1 = I_2$ и $\alpha = \theta$, т. е. изгиб происходит в плоскости действия сил. То же самое имеет место и для стержня произвольного сечения при $\alpha = 0$, т. е. когда силы направлены в главной плоскости. Для абсолютной величины прогиба

$$\zeta = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

имеет место уравнение

$$EI\zeta'''' = K, \qquad I = \frac{I_1 I_2}{\sqrt{I_1^2 \cos^2\alpha + I_2^2 \sin^2\alpha}}. \tag{20,7}$$

---

[1]) Уравнением вида

$$DX'''' - K_x = 0 \tag{20,4a}$$

описывается также в определенных предельных случаях и изгиб тонкой пластинки. Пусть прямоугольная пластинка (с длинами сторон a и b и толщиной h) укреплена вдоль своих сторон a (направление y) и изгибается вдоль сторон b (ось z) однородной вдоль оси y нагрузкой. В общем случае произвольных a и b для определения изгиба должно быть использовано двухмерное уравнение (12,5) с соответствующими граничными условиями на укрепленных и на свободных сторонах пластинки. В предельном случае $a \gg b$ деформацию можно считать однородной вдоль оси y, и тогда двухмерное уравнение равновесия переходит в уравнение вида (20,4а), причем роль жесткости на изгиб играет величина

$$D = Eh^3a/12\,(1 - \sigma^2).$$

Уравнение (20,4а) применимо и в обратном предельном случае $a \ll b$, когда пластинку можно рассматривать как стержень длины b с узким прямоугольным сечением (сечение в виде прямоугольника со сторонами a и h); при этом, однако, жесткость на изгиб определяется другим выражением

$$D = EI_2 = Eh^3a/12.$$

Перерезывающая сила **F** лежит в той же плоскости, что и **K**, и равна

$$F = -EI\zeta'''. \tag{20,8}$$

Величина I играет роль эффективного значения момента инерции сечения стержня.

Напишем в явном виде граничные условия для уравнений равновесия слабо изогнутого стержня. Если конец стержня заделан, то на нем должно быть $X = Y = 0$ и, сверх того, не может измениться его направление, т. е. должно быть $X' = Y' = 0$. Таким образом, на заделанном конце стержня должны выполняться условия

$$X = Y = 0, \quad X' = Y' = 0. \tag{20,9}$$

Сила же и момент сил реакции в точках опоры определяются по известному решению формулами (20,3) и (20,5).

При достаточно слабом изгибе стержня закрепление его конца в шарнире и опирание его в точке эквивалентны в отношении граничных условий. Дело в том, что во втором случае продольное смещение стержня в точке опоры является при слабом изгибе величиной второго порядка малости по сравнению с поперечным прогибом и потому должно считаться равным нулю. Граничные условия исчезновения поперечного смещения и момента сил дают в этих случаях

$$X = Y = 0, \quad X'' = Y'' = 0. \tag{20,10}$$

Направление же конца стержня и сила реакции в точке опоры определяются в результате решения уравнений.

Наконец, на свободном конце должны отсутствовать сила **F** и момент сил **M**. Согласно (20,3) и (20,5) это приводит к условиям

$$X'' = Y'' = 0, \quad X''' = Y''' = 0 \tag{20,11}$$

(если к свободному концу приложена сосредоточенная сила, то **F** должно быть равно этой силе, а не нулю).

Нетрудно обобщить уравнения (20,4) на случай стержней переменного сечения. У таких стержней моменты инерции I_1 и I_2 являются функциями z. Формулы (20,3), определяющие моменты сил в каждом данном сечении стержня, по-прежнему остаются справедливыми. Подстановка их в (20,2) приводит теперь к уравнениям

$$E\frac{d^2}{dz^2}\left(I_1\frac{d^2Y}{dz^2}\right) = K_y, \qquad E\frac{d^2}{dz^2}\left(I_2\frac{d^2X}{dz^2}\right) = K_x, \tag{20,12}$$

в которых I_1 и I_2 нельзя вынести из-под знака производной. Для перерезывающей силы имеем

$$F_x = -E\frac{d}{dz}\left(I_2\frac{d^2X}{dz^2}\right), \qquad F_y = -E\frac{d}{dz}\left(I_1\frac{d^2Y}{dz^2}\right). \tag{20,13}$$

Вернемся снова к уравнениям (20,1). Произведенное нами пренебрежение вторым членом в правой стороне равенства может оказаться в некоторых случаях незаконным даже при слабом изгибе. Это — те случаи, в которых вдоль длины стержня действует большая сила внутренних напряжений, т. е. F_z очень велико. Наличие такой силы вызывается обычно сильным натяжением стержня приложенными к его концам внешними растягивающими силами. Обозначим действующее вдоль стержня постоянное натяжение посредством $F_z = T$. Если стержень подвергается сильному сжатию, а не растяжению, то сила T отрицательна. Раскрывая векторное произведение $[\mathbf{F}\, d\mathbf{t}/dl]$, мы должны теперь сохранить члены, содержащие T, членами же с F_x и F_y можно по-прежнему пренебречь. Подставляя для компонент вектора $d\mathbf{t}/dl$ соответственно X'', Y'', 1, получим уравнения равновесия в виде

$$\begin{aligned} I_2 E X'''' - TX'' - K_x &= 0, \\ I_1 E Y'''' - TY'' - K_y &= 0. \end{aligned} \tag{20,14}$$

К выражениям (20,5) для перерезывающей силы надо прибавить теперь члены, равные проекциям действующей вдоль вектора $\mathbf{t}$ силы T на оси x и y:

$$F_x = -EI_2 X''' + TX', \quad F_y = -EI_1 Y''' + TY'. \tag{20,15}$$

Эти формулы могут быть, конечно, получены и непосредственно из (19,3).

Большая сила T может в некоторых случаях появиться и в результате самого изгиба, даже если нет никаких специально приложенных растягивающих сил. Рассмотрим стержень, оба конца которого заделаны или закреплены на шарнирах в неподвижных опорах, так что не могут испытывать продольного смещения. Тогда прогиб стержня неизбежно сопровождается его удлинением, что и приводит к появлению в нем силы T. Легко оценить величину прогиба, при котором эта сила делается существенной. Длина $L + \Delta L$ изогнутого стержня равна интегралу

$$L + \Delta L = \int_0^L \sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}\, dz,$$

взятому по прямой, соединяющей точки опоры. При слабом изгибе можно разложить корень в ряд, и мы получаем для удлинения ΔL выражение

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L (X'^2 + Y'^2)\, dz.$$

Возникающая при простом растяжении сила натяжения равна относительному удлинению, умноженному на модуль Юнга и на площадь S сечения стержня. Таким образом, сила T равна

$$T = \frac{ES}{2L} \int_0^L (X'^2 + Y'^2)\, dz. \qquad (20,16)$$

Если δ есть порядок величины поперечного прогиба, то производные X' и Y' — порядка δ/L, так что весь интеграл, стоящий в (20,16), — порядка величины $(\delta/L)^2 L = \delta^2/L$ и $T \sim ES(\delta/L)^2$. Порядок величины первых и вторых членов в (20,14) — соответственно $IE\delta/L^4$ и $T\delta/L^2 \sim ES\delta^3/L^4$. Момент инерции I имеет порядок величины $I \sim h^4$, а $S \sim h^2$, где h — толщина стержня. Подставляя это, легко получаем, что первые и вторые члены в (20,14) сравниваются по порядку величины при $\delta \sim h$.

Таким образом, при изгибе стержней, концы которых закреплены, можно пользоваться уравнениями равновесия в виде (20,4), только если прогиб мал по сравнению с толщиной стержня. Если же δ не мало по сравнению с h (но, конечно, по-прежнему $\delta \ll L$), то надо пользоваться уравнениями (20,14). При этом сила T в этих уравнениях заранее неизвестна. При их решении надо сначала рассматривать T как заданный параметр, а затем по полученному решению определить T согласно формуле (20,16), чем и определится связь T с приложенными к стержню изгибающими силами.

Обратным предельным случаем является тот, когда сопротивление стержня на изгиб мало по сравнению с его сопротивлением на растяжение, так что в уравнениях (20,14) можно пренебречь первыми членами по сравнению со вторыми. Физически такой случай может быть осуществлен либо очень сильным растяжением T, либо при достаточно малом EI, что может быть связано с малой толщиной h (о сильно натянутых стержнях говорят как о *струнах*). Уравнения равновесия гласят в этих случаях:

$$TX'' + K_x = 0, \quad TY'' + K_y = 0. \qquad (20,17)$$

Концы струны надо представлять себе закрепленными в том смысле, что их координаты заданы, т. е.

$$X = Y = 0. \qquad (20,18)$$

Направление же концов не может быть задано произвольным образом, а определяется решением уравнений.

В заключение покажем, каким образом уравнения равновесия слабо изогнутого стержня можно получить, исходя из вариационного принципа, используя выражение (18,10) для упругой энергии:

$$F_{\text{ст}} = \frac{E}{2} \int \{I_1 Y''^2 + I_2 X''^2\}\, dz.$$

В равновесии должна быть минимальна сумма этой энергии и потенциальной энергии, связанной с действующими на стержень внешними силами **K**, т. е. должно быть

$$\delta F_{\text{ст}} - \int (K_x \delta X + K_y \delta Y)\, dz = 0$$

(второй член представляет собой работу внешних сил при бесконечно малом смещении линии стержня). При варьировании $F_{\text{ст}}$ производим дважды интегрирование по частям:

$$\frac{1}{2}\delta \int X''^2\, dz = \int X''\, \delta X''\, dz = X''\, \delta X' \Big| - \int X'''\, \delta X'\, dz =$$

$$= X''\, \delta X' \Big| - X'''\, \delta X \Big| + \int X''''\, \delta X\, dz$$

и аналогичным образом для интеграла от Y''^2. Собирая различные члены, получим

$$\int [(EI_1 Y'''' - K_y)\, \delta Y + (EI_2 X'''' - K_x)\, \delta X]\, dz +$$

$$+ EI_1 (Y''\, \delta Y' - Y'''\, \delta Y) \Big| + EI_2 (X''\, \delta X' - X'''\, \delta X) \Big| = 0.$$

Из первого, интегрального, члена следуют ввиду произвольности вариаций δX и δY уравнения равновесия (20,4). Остальные же, проинтегрированные, члены дают граничные условия к этим уравнениям; так, на свободном конце вариации δX, δY, $\delta X'$, $\delta Y'$ произвольны и соответственно получаются условия (20,11). В то же время коэффициенты при δX и δY в этих членах дают выражения (20,5) для компонент перерезывающей силы, а коэффициенты при $\delta X'$ и $\delta Y'$ — выражения (20,3) для компонент изгибающего момента.

Наконец, уравнения равновесия (20,14) при наличии растягивающей силы T можно получить тем же способом, прибавив к варьируемой энергии величину

$$T\, \Delta L = \frac{T}{2} \int (X'^2 + Y'^2)\, dz,$$

представляющую собой работу силы T на пути ΔL — удлинении стержня.

Задачи

1. Определить форму прогиба стержня (длины l) под влиянием собственного веса при различных способах закрепления его концов.

Решение. Искомая форма определяется решением уравнения

$$\zeta'''' = q/EI$$

(q — вес единицы длины стержня) с теми или другими граничными условиями на его концах, сформулированными в тексте. При различных способах закрепления концов стержня получаются следующие формы прогиба и максимальные

смещения (так называемые стрелки прогиба); начало координат везде выбрано в одном из концов стержня.

а) Оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2 (z - l)^2, \qquad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

б) Оба конца оперты:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z (z^3 - 2lz^2 + l^3), \qquad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

в) Один конец ($z = l$) заделан, а другой ($z = 0$) оперт:

$$\zeta = \frac{q}{48EI} z (2z^3 - 3lz^2 + l^3), \qquad \zeta(0{,}42l) = 0{,}0054 \frac{ql^4}{EI}.$$

г) Один конец ($z = 0$) заделан, а другой ($z = l$) свободен:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2 (z^2 - 4lz + 6l^2), \qquad \zeta(l) = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$

2. Определить форму прогиба стержня под влиянием приложенной к его середине сосредоточенной силы f.

Решение. Везде, кроме точки $z = l/2$, имеем уравнение $\zeta'''' = 0$. Граничные условия в концах стержня ($z = 0$ и $z = l$) определяются способом закрепления; в точке же $z = l/2$ должны быть непрерывны ζ, ζ', ζ'', а разность перерезывающих сил $F = -EI\zeta'''$ по обе стороны этой точки должна быть равна силе f.

Форма стержня (на участке $0 \leqslant z \leqslant l/2$) и стрелка прогиба даются следующими формулами.

а) Оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z^2 (3l - 4z), \qquad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{192EI}.$$

б) Оба конца стержня оперты:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z (3l^2 - 4z^2), \qquad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{48EI}.$$

Форма стержня симметрична относительно его середины, так что функция $\zeta(z)$ на участке $l/2 \leqslant z \leqslant l$ получается отсюда просто заменой z на $l - z$.

3. То же для стержня, один из концов которого ($z = 0$) заделан, а другой ($z = l$) свободен, причем к последнему приложена сосредоточенная сила f.

Решение. Вдоль всего стержня $F = \text{const} = f$, так что $\zeta''' = -f/EI$. С условиями $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$ при $z = 0$ и $\zeta'' = 0$ при $z = l$ получаем

$$\zeta = \frac{f}{6EI} z^2 (3l - z), \qquad \zeta(l) = \frac{fl^3}{3EI}.$$

4. Определить форму прогиба стержня с закрепленными концами под влиянием сосредоточенной пары сил, приложенной к его середине.

Решение. Вдоль всей длины стержня $\zeta'''' = 0$, а в точке $z = l/2$ момент $M = EI\zeta''$ испытывает скачок, равный моменту m приложенной сосредоточенной пары. С соответствующими условиями на концах получим:

а) Оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{m}{8EIl} z^2 (l - 2z) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{8EIl} (l - z)^2 [l - 2(l - z)] \quad \text{при} \quad l/2 \leqslant z \leqslant l.$$

б) Оба конца закреплены в шарнирах:

$$\zeta = \frac{m}{24EIl} z (l^2 - 4z^2) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EIl} (l - z) [l^2 - 4 (l - z)^2] \quad \text{при} \quad l/2 \leqslant z \leqslant l.$$

По обе стороны от точки $z = l/2$ стержень изогнут в разные стороны.

5. То же, если сосредоточенная пара приложена к свободному концу стержня, другой конец которого заделан.

Решение. Вдоль всей длины стержня имеем $M = EI\zeta'' = m$, а в точке $z = 0$: $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$. Форма изгиба дается формулой

$$\zeta = \frac{m}{2EI} z^2.$$

6. Определить форму стержня (кругового сечения) с закрепленными в шарнирах концами, растягиваемого силой T и изгибаемого силой f, приложенной к его середине.

Решение. На отрезке $0 \leqslant z \leqslant l/2$ перерезывающая сила равна $f/2$, так что (20,15) дает уравнение

$$\zeta''' - \frac{T}{EI} \zeta' = -\frac{f}{2EI}.$$

Граничные условия: $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$ при $z = 0, l$, а при $z = l/2$ должно быть $\zeta' = 0$ (в силу непрерывности ζ'). Для формы стержня (на отрезке $0 \leqslant z \leqslant l/2$) получим формулу

$$\zeta = \frac{f}{2T} \left(z - \frac{\operatorname{sh} kz}{k \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right), \qquad k = \left(\frac{T}{EI} \right)^{1/2}.$$

При малых k это выражение переходит в формулу, полученную в задаче 2, б. При больших же значениях k оно переходит в

$$\zeta = \frac{f}{2T} z,$$

т. е., в согласии с уравнением (20.17), гибкая нить принимает под влиянием силы f форму, составленную из двух прямых отрезков, пересекающихся в точке $z = l/2$.

Если сила T сама возникает в результате растяжения стержня поперечной силой, то для ее определения надо воспользоваться формулой (20,16). Подставив в нее полученное выражение, найдем уравнение

$$\frac{1}{k^6} \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 \frac{kl}{2} - \frac{3}{kl} \operatorname{th} \frac{kl}{2} \right] = \frac{8E^2 I^3}{f^2 S},$$

определяющее в неявном виде T как функцию от f.

7. Стержень (кругового сечения) бесконечной длины лежит на упругом основании, т. е. при изгибе на него действует сила $K = -\alpha\zeta$, пропорциональная прогибу. Определить форму, принимаемую стержнем при действии на него сосредоточенной силы f.

Решение. Выбираем начало координат в точке приложения силы f. Везде, кроме точки $z = 0$, имеет место уравнение

$$EI\zeta'''' = -\alpha\zeta.$$

Решение должно удовлетворять условиям $\zeta = 0$ при $z = \pm\infty$, а при $z = 0$ должны быть непрерывны ζ', ζ''; разность же значений перерезывающей силы $F = -EI\zeta'''$ при $z \to +0$ и $z \to -0$ должна быть равна f. Такое решение есть

$$\zeta = \frac{f}{8\beta^3 EI} e^{-\beta|z|}[\cos\beta|z| + \sin\beta|z|], \qquad \beta = \left(\frac{\alpha}{4EI}\right)^{1/4}.$$

8. Вывести уравнение равновесия для слабого изгиба тонкого стержня (кругового сечения), имеющего в своем естественном состоянии форму дуги окружности и изгибаемого в своей плоскости приложенными к нему радиальными силами.

Решение. Выбирая начало полярных координат r, φ в центре окружности, напишем уравнение деформированной линии стержня в виде $z = a + \zeta(\varphi)$, где a — радиус дуги, а ζ — малые радиальные смещения при изгибе. Воспользовавшись известным выражением для радиуса кривизны в полярных координатах, найдем с точностью до членов первого порядка по ζ

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{a} - \frac{\zeta + \zeta''}{a^2}$$

($'$ означает дифференцирование по φ). Согласно (18,11) находим упругую энергию изгиба:

$$F_{\text{ст}} = \frac{EI}{2}\int_0^{\varphi_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)^2 a\,d\varphi = \frac{EI}{2a^3}\int_0^{\varphi_0}(\zeta + \zeta'')^2\,d\varphi$$

(φ_0 — центральный угол дуги). Уравнение равновесия получается из вариационного принципа

$$\delta F_{\text{ст}} - \int_0^{\varphi_0}\delta\zeta K_r a\,d\varphi = 0$$

(K_r — отнесенная к единице длины внешняя радиальная сила) с дополнительным условием

$$\int_0^{\varphi_0}\zeta\,d\varphi = 0,$$

выражающим собой в рассматриваемом приближении условие неизменности общей длины периметра стержня, т. е. условие отсутствия общего его растяжения. Следуя методу Лагранжа, приравниваем нулю сумму

$$\delta F_{\text{ст}} - \int_0^{\varphi_0} aK_r\,\delta\zeta\,d\varphi + a\alpha\int_0^{\varphi_0}\delta\zeta\,d\varphi = 0,$$

где α — постоянная. Производя варьирование в подынтегральном выражении в $F_{\text{ст}}$ и интегрируя член с $\delta\zeta''$ дважды по частям, получим

$$\int\left[\frac{EI}{a^3}(\zeta + 2\zeta'' + \zeta'''') - aK_r + \alpha a\right]\delta\zeta\,d\varphi +$$
$$+ \frac{EI}{a^3}(\zeta + \zeta'')\,\delta\zeta'\Big| - \frac{EI}{a^3}(\zeta' + \zeta''')\,\delta\zeta\Big| = 0.$$

Отсюда находим уравнение равновесия

$$\frac{EI}{a^4}(\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta) - K_r + \alpha = 0, \tag{1}$$

выражение для перерезывающей силы

$$F = -\frac{EI}{a^3}(\zeta' + \zeta''')$$

и выражение для изгибающего момента

$$M = \frac{EI}{a^2}(\zeta + \zeta'')$$

(ср. конец § 20). Постоянная α определяется условием отсутствия общего растяжения стержня.

9. Определить деформацию кругового кольца, изгибаемого двумя сосредоточенными силами f, действующими вдоль диаметра (рис. 18).

Решение. Интегрируя уравнение (1) по всей длине кольца, найдем, что

$$2\pi\alpha a = \int K_r a\, d\varphi = 2f.$$

Везде, кроме точек $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, имеем уравнение (1) с $K_r = 0$:

$$\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta + \frac{fa^3}{\pi EI} = 0.$$

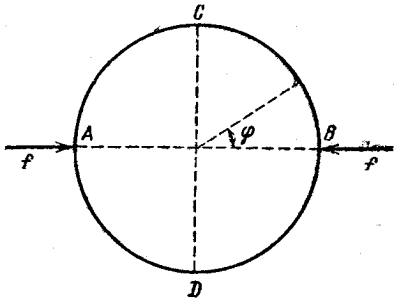

Рис. 18

Искомая деформация кольца симметрична относительно диаметров AB и CD, в силу чего в точках A, B, C, D должно быть $\zeta' = 0$. Разность значений перерезывающей силы при $\varphi \to \pm 0$ должна быть равна f. Удовлетворяющее этим условиям решение уравнения равновесия есть

$$\zeta = \frac{fa^3}{EI}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\varphi\cos\varphi - \frac{\pi}{8}\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin\varphi\right), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

В частности, точки A и B взаимно сближаются на величину

$$|\zeta(0) + \zeta(\pi)| = \frac{fa^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right).$$

§ 21. Устойчивость упругих систем

Поведение стержня, подверженного воздействию продольных сжимающих сил, представляет простейший пример важного явления *упругой неустойчивости*, впервые обнаруженного *Л. Эйлером*.

При отсутствии поперечных изгибающих внешних сил K_x, K_y уравнения равновесия сжатого стержня (20,14) имеют очевидное решение $X = Y = 0$, соответствующее стержню, остающемуся при воздействии продольной силы T прямолинейным. Это решение, однако, соответствует устойчивому равновесию стержня лишь до тех пор, пока сжимающая сила $|T|$ остается меньше некоторого критического значения $T_{кр}$. При $|T| < T_{кр}$ прямолинейная форма стержня устойчива по отношению к произвольному малому возмущению. Другими словами, если под влиянием