

выражение для перерезывающей силы

$$F = -\frac{EI}{a^3} (\zeta' + \zeta'')$$

и выражение для изгибающего момента

$$M = \frac{EI}{a^2} (\zeta + \zeta'')$$

(ср. конец § 20). Постоянная α определяется условием отсутствия общего растяжения стержня.

9. Определить деформацию кругового кольца, изогбаемого двумя сосредоточенными силами f , действующими вдоль диаметра (рис. 18).

Решение. Интегрируя уравнение (1) по всей длине кольца, найдем, что

$$2\pi a \alpha = \int K_r a d\phi = 2f.$$

Возле, кроме точек $\phi = 0$ и $\phi = \pi$, имеем уравнение (1) с $K_r = 0$:

$$\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta + \frac{fa^3}{\pi EI} = 0.$$

Искомая деформация кольца симметрична относительно диаметров AB и CD , в силу чего в точках A , B , C , D должно быть $\zeta' = 0$. Разность значений перерезывающей силы при $\phi \rightarrow \pm 0$ должна быть равна f . Удовлетворяющее этим условиям решение уравнения равновесия есть

$$\zeta = \frac{fa^3}{EI} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \phi \cos \phi - \frac{\pi}{8} \cos \phi - \frac{1}{4} \sin \phi \right), \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

В частности, точки A и B взаимно сближаются на величину

$$|\zeta(0) + \zeta(\pi)| = \frac{fa^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right).$$

§ 21. Устойчивость упругих систем

Поведение стержня, подверженного воздействию продольных сжимающих сил, представляет простейший пример важного явления *упругой неустойчивости*, впервые обнаруженного Л. Эйлером.

При отсутствии поперечных изгибающих внешних сил K_x , K_y уравнения равновесия сжатого стержня (20,14) имеют очевидное решение $X = Y = 0$, соответствующее стержню, остающемуся при воздействии продольной силы T прямолинейным. Это решение, однако, соответствует устойчивому равновесию стержня лишь до тех пор, пока сжимающая сила $|T|$ остается меньше некоторого критического значения T_{kp} . При $|T| < T_{kp}$ прямолинейная форма стержня устойчива по отношению к произвольному малому возмущению. Другими словами, если под влиянием

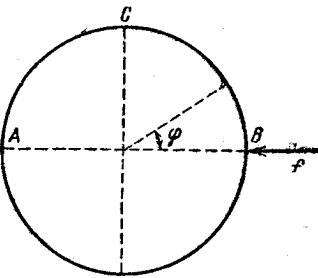


Рис. 18

какого-либо малого воздействия стержень подвергается слабому изгибу, то по прекращении этого воздействия стержень будет стремиться вернуться в исходное состояние.

Напротив, при $|T| > T_{kp}$ прямолинейная форма отвечает неустойчивому равновесию. Достаточно уже бесконечно малого воздействия (изгиба) для того, чтобы равновесие нарушилось, в результате чего произойдет сильный изгиб стержня. Ясно, что в этих условиях сжатый стержень вообще не сможет реально существовать в неизогнутом виде.

Поведение стержня после потери им устойчивости должно описываться уравнениями сильного изгиба. Однако самое значение критической нагрузки T_{kp} может быть получено с помощью уравнений слабого изгиба. При $|T| = T_{kp}$ прямолинейная форма стержня соответствует некоторому безразличному равновесию. Это значит, что наряду с решением $X = Y = 0$ должны существовать еще и состояния слабого изгиба, которые тоже являются равновесными. Поэтому критическое значение T_{kp} можно определить как то значение $|T|$, при котором у уравнений

$$EI_2 X'''' + |T| X'' = 0, \quad EI_1 Y'''' + |T| Y'' = 0 \quad (21,1)$$

появляется отличное от нуля решение. Само же это решение определяет характер деформации, которой подвергнется стержень непосредственно после потери им устойчивости.

В задачах этого параграфа приведен ряд типичных случаев потери устойчивости различными упругими системами.

Задачи

1. Определить критическую сжимающую силу для стержня с шарнирно закрепленными концами.

Решение. Поскольку нас интересует наименьшее значение $|T|$, при котором появляется отличное от нуля решение уравнений (21,1), то достаточно рассмотреть лишь то из этих двух уравнений, которое содержит меньшее из I_1, I_2 ; пусть $I_2 < I_1$. Ищем решение уравнения

$$EI_2 X''' + |T| X'' = 0$$

в виде

$$X = A + Bz + C \sin kz + D \cos kz, \quad k = (|T|/EI_2)^{1/2}.$$

Отличное от нуля решение, удовлетворяющее условиям $X = 0, X'' = 0$ при $z = 0$ и $z = l$, есть

$$X = C \sin kz,$$

причем должно быть $\sin kl = 0$. Отсюда находим искомую критическую силу

$$T_{kp} = \pi^2 EI_2 / l^2.$$

После потери устойчивости стержень примет форму, изображенную на рис. 19, а.

2. То же для стержня с заданными концами (рис. 19, б).

Решение. $T_{kp} = 4\pi^2 EI_2 / l^2$.

3. То же для стержня, один из концов которого заделан, а другой свободен (рис. 19, в).

Решение. $T_{kp} = \pi^2 EI_2 / 4l^2$.

4. Определить критическую сжимающую силу для стержня (кругового сечения) с шарнирно закрепленными концами, лежащего на упругом основании (см. задачу 7 § 20).

Решение. Вместо уравнений (21,1) здесь надо рассмотреть уравнение

$$EI X''' + |T| X'' + \alpha X = 0.$$

Аналогичное исследование приводит к решению

$$X = A \sin \frac{n\pi}{l} z, \quad T_{kp} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(n^2 + \frac{\alpha l^4}{n^2 \pi^4 EI} \right),$$

причем для n должно быть взято то из целых значений, для которого получается наименьшее значение T_{kp} . При достаточно больших значениях α получается $n > 1$, т. е. после потери устойчивости стержень принимает форму с несколькими пучностями.

5. Стержень кругового сечения подвергнут кручению, и его концы заделаны. Определить критическую величину кручения, после которой прямолинейная форма стержня делается неустойчивой.

Решение. Критическое значение угла кручения определяется появлением отличных от нуля решений уравнений слабого изгиба закрученного стержня. Для вывода этих уравнений подставляем выражение (19,7):

$$M = EI \left[t \frac{dt}{dl} \right] + C\tau t$$

(t — постоянный угол кручения) в уравнение (19,3); это дает

$$EI \left[t \frac{d^2t}{dl^2} \right] + C\tau \frac{dt}{dl} - [Ft] = 0.$$

Дифференцируем это уравнение; поскольку изгиб слабый, то при дифференцировании первого и третьего членов можно считать t постоянным, равным вектору t_0 , направленному по оси стержня (оси z). Помня также, что $dF/dl = 0$ (внешние силы по длине стержня отсутствуют), получаем

$$EI \left[t_0 \frac{d^3t}{dl^3} \right] + C\tau \frac{d^2t}{dl^2} = 0,$$

или в компонентах:

$$Y''' - \kappa X''' = 0, \quad X''' + \kappa Y'' = 0,$$

где $\kappa = C\tau/EI$. Введя в качестве неизвестной функцию $\xi = X + iY$, получим уравнение

$$\xi''' - i\kappa \xi'' = 0.$$

Ищем решение, удовлетворяющее условиям $\xi = 0$, $\xi' = 0$ при $z = 0$, l в виде

$$\xi = a(1 + i\kappa z - e^{i\kappa z}) + bz^2,$$

и находим в качестве условия совместности для получающихся для a и b уравнений соотношение

$$e^{i\kappa l} = \frac{2 + i\kappa l}{2 - i\kappa l}, \quad \frac{\kappa l}{2} = \operatorname{tg} \frac{\kappa l}{2}.$$

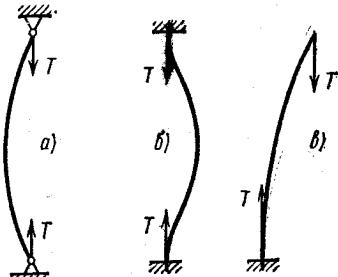


Рис. 19

Наименьший корень этого уравнения: $\kappa l/2 = 4,49$, так что

$$\tau_{kp} = \frac{8,98EI}{Cl}.$$

6. То же для стержня с шарнирно закрепленными концами.
Решение. Здесь получается

$$\xi = a \left(1 - e^{i\kappa z} - \frac{\kappa^2}{2} z^2 \right) + bz,$$

причем κ определяется из $e^{i\kappa l} = 1$, т. е. $\kappa l = 2\pi$. Поэтому искомый критический угол кручения

$$\tau_{kp} = 2\pi EI/Cl.$$

7. Определить предел устойчивости вертикального стержня, находящегося под действием собственного веса; нижний конец стержня заделан.

Решение. Если продольное натяжение $F_z \equiv T$ меняется вдоль длины стержня, то в первом члене в (20,1) $\frac{dF_z}{dl} \neq 0$ и вместо уравнений (20,14) получается

$$I_2 EX''' - (TX)' - K_x = 0,$$

$$I_1 EY''' - (TY)' - K_y = 0.$$

В данном случае поперечные изгибающие силы отсутствуют по всей длине стержня, а $T = -q(l-z)$, где q — вес единицы длины стержня, а z отсчитывается от его нижнего конца. Предполагая, что $I_2 < I_1$, рассматриваем уравнение

$$I_2 EX''' = TX' = -q(l-z)X'$$

(при $z=l$ автоматически имеем $X'''=0$). Общий интеграл этого уравнения для функции $u=X'$ есть

$$u = \eta^{1/3} [aJ_{-1/3}(\eta) + bJ_{1/3}(\eta)],$$

где

$$\eta = \frac{2}{3} \left(\frac{q}{EI_2} (l-z)^3 \right)^{1/2}.$$

Границные условия $X'=0$ при $z=0$ и $X''=0$ при $z=l$ дают для функции $u(\eta)$ условия

$$u=0 \quad \text{при } \eta=\eta_0 \equiv \frac{2}{3} \left(\frac{ql^3}{EI_2} \right)^{1/2}, \quad u'\eta^{1/3}=0 \quad \text{при } \eta=0.$$

Для того чтобы удовлетворить этим условиям, надо положить $b=0$, причем $J_{-1/3}(\eta_0)=0$. Наименьший корень этого уравнения $\eta_0 \approx 1,87$, откуда находим критическую длину стержня

$$l_{kp} = 1,98 \left(\frac{EI_2}{q} \right)^{1/3}.$$

8. Стержень обладает вытянутой формой поперечного сечения, так что $I_2 \gg I_1$. Один конец стержня заделан, а к свободному концу приложена сила f , изгибающая его в главной плоскости x, z (в которой жесткость на изгиб есть EI_2). Определить критическое значение f_{kp} , после которого плоская форма изгиба становится неустойчивой и стержень отгибается в боковую сторону (в плоскости y, z), одновременно испытывая кручение.

Решение. Ввиду большой величины жесткости EI_2 по сравнению с EI_1 (и с жесткостью на кручение C)¹⁾ неустойчивость по отношению к сильному боковому изгибу возникает в то время, когда изгиб в плоскости x, z остается еще слабым. Для определения момента наступления неустойчивости надо составить уравнения слабого бокового изгиба стержня, сохранив в них члены, пропорциональные произведению действующей в плоскости x, z силы f на малые смещения. Поскольку сосредоточенная сила приложена лицом к свободному концу стержня, то вдоль всей его длины $F = f$, а на свободном конце ($z = l$) момент $M = 0$; по формуле (19,6) находим компоненты момента относительно закрепленной системы координат x, y, z :

$$M_x = 0, \quad M_y = (l - z)f, \quad M_z = (Y - Y_0)f,$$

где $Y_0 = Y(l)$. Проецируем эти моменты на связанные в каждой точке со стержнем оси координат ξ, η, ζ ; с точностью до членов первого порядка по смещениям получим

$$M_\xi = \varphi(l - z)f, \quad M_\eta = (l - z)f,$$

$$M_\zeta = (l - z)f \frac{dY}{dz} + f(Y - Y_0),$$

где φ — полный угол поворота сечения стержня при его закручивании (угол кручения $\tau = d\varphi/dz$ здесь не постоянен вдоль длины стержня). С другой стороны, согласно (18,6) и (18,9) имеем при слабом изгибе

$$M_\xi = -EI_1Y'', \quad M_\eta = EI_2X'', \quad M_\zeta = C\varphi'$$

и, сравнивая эти выражения, получим уравнения равновесия

$$EI_2X'' = (l - z)f,$$

$$EI_1Y'' = -\varphi(l - z)f, \quad C\varphi' = (l - z)fY' + (Y - Y_0)f.$$

Первое из этих уравнений определяет основной изгиб стержня в плоскости x, z ; требуется найти значение f , при котором появляется отличное от нуля решение у второго и третьего уравнений. Исключая из них Y , найдем

$$\varphi'' + k^2(l - z)^2\varphi = 0, \quad k^2 = f^2/EI_1C.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\varphi = a\sqrt{l-z}J_{1/4}\left(\frac{k}{2}(l-z)^2\right) + b\sqrt{l-z}J_{-1/4}\left(\frac{k}{2}(l-z)^2\right).$$

На заделанном конце ($z = 0$) должно быть $\varphi = 0$, а на свободном крутящий момент $C\varphi' = 0$. Из второго условия имеем $a = 0$, а первое дает $J_{-1/4}(kl^2/2) = 0$. Наименьший корень этого уравнения: $kl^2/2 = 2,006$, откуда

$$f_{kp} = \frac{4,01}{l^2} (EI_1C)^{1/2}.$$

¹⁾ Так, для узкого прямоугольного сечения с шириной h и высотой $b \gg h$ имеем

$$EI_1 = \frac{bh^3}{12}E, \quad EI_2 = \frac{b^3h}{12}E, \quad C = \frac{bh^3}{3}\mu.$$