

## ГЛАВА III

### УПРУГИЕ ВОЛНЫ

#### § 22. Упругие волны в изотропной среде

Если в деформируемом теле происходит движение, то температура тела, вообще говоря, отнюдь не постоянна, а меняется как со временем, так и от точки к точке вдоль тела. Это обстоятельство сильно усложняет точные уравнения движения в общем случае произвольных движений.

Обычно, однако, положение упрощается благодаря тому, что передача тепла из одного участка тела в другой (посредством простой теплопроводности) происходит очень медленно. Если теплообмен практически не происходит в течение промежутков времени порядка периода колебательных движений в теле, то можно рассматривать каждый участок тела как теплоизолированный, т. е. движение будет адиабатическим. Но при адиабатических деформациях  $\sigma_{ik}$  выражается через  $u_{ik}$  по формулам обычного вида с той лишь разницей, что вместо обычных (изотермических) значений величин  $E$ ,  $\sigma$  надо брать их адиабатические значения (см. § 6). Ниже мы будем считать это условие выполненным, и соответственно этому под  $E$  и  $\sigma$  в этой главе будут подразумеваться их адиабатические значения.

Для того чтобы получить уравнения движения упругой среды, надо приравнять силу внутренних напряжений  $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$  произведению ускорения  $\ddot{u}_i$  на массу единицы объема тела, т. е. на его плотность  $\rho$ :

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (22,1)$$

Это — общий вид уравнений движения<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Подразумевается, что скорость  $v$  в точек среды совпадает с производной  $\dot{u}$  от ее смещения. Подчеркнем, однако, что отождествление этих двух величин отнюдь не является чем-то само собой разумеющимся. В кристаллах вектор  $u$  представляет собой смещение узлов решетки; скорость же  $v$  определяется в механике сплошных сред как импульс единицы массы вещества. Равенство  $v = \dot{u}$  справедливо, строго говоря, лишь для идеальных кристаллов, где в каждом узле решетки (и только в них) находится по атому. Если же кристалл содержит дефекты (незаполненные узлы — вакансии, или же, напротив, лишние атомы в междоузлиях), то перенос массы относительно решетки (т. е. отличный от нуля импульс) может существовать и в недеформированной решетке — за счет диффузии дефектов «сквозь решетку». Отождествление  $v$  и  $\dot{u}$  подразумевает пренебрежение этими эффектами — в связи с медленностью диффузии или малой концентрацией дефектов.

В частности, уравнения движения изотропной упругой среды можно написать непосредственно по аналогии с уравнением равновесия (7,2). Имеем

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (22,2)$$

Поскольку все деформации предполагаются малыми, то рассматриваемые в теории упругости движения представляют собой малые *упругие колебания* или *волны*. Начнем с рассмотрения плоской упругой волны в неограниченной изотропной среде, т. е. волны, в которой деформация  $\mathbf{u}$  является функцией только от одной из координат, скажем, от  $x$  (и от времени). Все производные по  $y$  и  $z$  в уравнениях (22,2) исчезают, и мы получаем для отдельных компонент вектора  $\mathbf{u}$  следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 \quad (22,3)$$

(уравнение для  $u_z$  такое же, как для  $u_y$ ), где введены обозначения<sup>1)</sup>:

$$c_l = \left[ \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)} \right]^{1/2}, \quad c_t = \left[ \frac{E}{2\rho(1+\sigma)} \right]^{1/2}. \quad (22,4)$$

Уравнения (22,3) представляют собой обычные волновые уравнения в одном измерении, и входящие в них величины  $c_l$  и  $c_t$  являются скоростями распространения волны. Мы видим, что скорость распространения волны оказывается различной для компоненты  $u_x$ , с одной стороны, и компоненты  $u_y$ ,  $u_z$  — с другой.

Таким образом, упругая волна представляет собой по существу две независимо распространяющиеся волны. В одной из них ( $u_x$ ) смещение направлено вдоль распространения самой волны; такую волну называют *продольной*, она распространяется со скоростью  $c_l$ . В другой ( $u_y$ ,  $u_z$ ) — смещение направлено в плоскости, перпендикулярной направлению распространения; такую волну называют *поперечной*, она распространяется со скоростью  $c_t$ . Как видно из (22,4), скорость  $c_l$  всегда больше скорости  $c_t$ <sup>2)</sup>:

$$c_l > (4/3)^{1/2} c_t. \quad (22,5)$$

Скорости  $c_l$  и  $c_t$  называют *продольной* и *поперечной* *скоростями звука*.

<sup>1)</sup> Дадим также выражения скоростей  $c_l$  и  $c_t$  через коэффициенты сжатия и сдвига и через коэффициенты Ламэ:

$$c_l = \left( \frac{3K+4\mu}{3\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad c_t = \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}.$$

<sup>2)</sup> При фактическом изменении  $\sigma$  в пределах от 0 до 1/2 (см. примечание на стр. 26) имеет место и более сильное неравенство  $c_l > c_t \sqrt{2}$ .

Мы знаем, что изменение объема при деформации определяется суммой диагональных членов тензора деформации, т. е. величиной  $u_{ii} \equiv \operatorname{div} u$ . В поперечной волне имеются только компоненты  $u_y$ ,  $u_z$ , и поскольку они не зависят ни от  $y$ , ни от  $z$ , для такой волны  $\operatorname{div} u = 0$ . Таким образом, поперечные волны не связаны с изменением объема отдельных участков тела. Напротив, для продольных волн  $\operatorname{div} u \neq 0$ ; эти волны сопровождаются сжатиями и расширениями в теле.

Разделение волны на две независимо распространяющиеся с разными скоростями части можно произвести и в общем случае произвольной (не плоской) упругой волны в неограниченном пространстве.

Перепишем уравнение (22,2), введя в него скорости  $c_l$  и  $c_t$ :

$$\ddot{u} = c_l^2 \Delta u + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} u. \quad (22,6)$$

Представим вектор  $u$  в виде суммы двух частей:

$$u = u_l + u_t, \quad (22,7)$$

из которых одна удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} u_t = 0, \quad (22,8)$$

а другая — условию

$$\operatorname{rot} u_l = 0. \quad (22,9)$$

Из векторного анализа известно, что такое представление всегда возможно (это есть представление вектора в виде суммы ротора некоторого вектора и градиента некоторого скаляра).

При подстановке  $u = u_l + u_t$  в (22,6) получаем

$$\ddot{u}_l + \ddot{u}_t = c_l^2 \Delta (u_l + u_t) + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} u_l. \quad (22,10)$$

Применим к обеим сторонам этого уравнения операцию  $\operatorname{div}$ . Поскольку  $\operatorname{div} u_t = 0$ , мы получим

$$\operatorname{div} \ddot{u}_l = c_l^2 \Delta \operatorname{div} u_l + (c_l^2 - c_t^2) \Delta \operatorname{div} u_l,$$

или

$$\operatorname{div} (\ddot{u}_l - c_l^2 \Delta u_l) = 0.$$

С другой стороны,  $\operatorname{rot}$  стоящего в скобках выражения тоже равен нулю в силу (22,9). Но если  $\operatorname{rot}$  и  $\operatorname{div}$  некоторого вектора исчезают во всем пространстве, то этот вектор тождественно равен нулю. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta u_l = 0. \quad (22,11)$$

Аналогично применяя к уравнению (22,10) операцию  $\operatorname{rot}$  и помня, что  $\operatorname{rot} u_t = 0$  и что  $\operatorname{rot}$  всякого градиента равен нулю, находим

$$\operatorname{rot} (\ddot{u}_t - c_t^2 \Delta u_t) = 0.$$

Поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{u}_t$  стоящего в скобках выражения тоже равна нулю, то мы приходим опять к уравнению того же вида, как и (22,11):

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta u_t = 0. \quad (22,12)$$

Уравнения (22,11) и (22,12) представляют собой обычные волновые уравнения (в трех измерениях). Каждое из них соответствует распространению упругой волны со скоростью соответственно  $c_l$  или  $c_t$ . Одна из этих волн ( $u_t$ ) не связана с изменением объема (в силу  $\operatorname{div} u_t = 0$ ), а другая ( $u_l$ ) сопровождается объемными сжатиями и расширениями.

В монохроматической упругой волне вектор смещения имеет вид

$$u = \operatorname{Re} \{u_0(r) e^{-i\omega t}\}, \quad (22,13)$$

где  $u_0$  — функция координат. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$c_l^2 \Delta u_0 + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} u_0 + \omega^2 u_0 = 0, \quad (22,14)$$

получающемуся при подстановке (22,13) в (22,6). Продольная и поперечная части монохроматической волны удовлетворяют уравнениям

$$\Delta u_l + k_l^2 u_l = 0, \quad \Delta u_t + k_t^2 u_t = 0, \quad (22,15)$$

где  $k_l = \omega/c_l$ ,  $k_t = \omega/c_t$  — волновые векторы продольной и поперечной волн.

Наконец, рассмотрим отражение и преломление плоской монохроматической упругой волны на границе раздела между двумя различными упругими средами. При этом надо иметь в виду, что при отражении и преломлении характер волны, вообще говоря, меняется. Если на границу раздела падает чисто поперечная или чисто продольная волна, то в результате получаются смешанные волны, содержащие как поперечные, так и продольные части. Характер волны не меняется (как это яствует из соображений симметрии) только в случае перпендикулярного падения волны на поверхность раздела и в случае падения под произвольным углом поперечной волны с параллельными плоскости раздела колебаниями.

Соотношения, определяющие направления отраженной и преломленной волн, могут быть получены непосредственно из постоянства частоты и касательных к поверхности раздела компонент волнового вектора<sup>1)</sup>. Пусть  $\theta$  и  $\theta'$  — угол падения и угол отражения (или преломления), а  $c$ ,  $c'$  — скорости обеих рассматриваемых волн. Тогда

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c}{c'}. \quad (22,16)$$

<sup>1)</sup> См. VI, § 66. Все изложенные там соображения полностью применимы и здесь.

Пусть, например, падающая волна поперечна. Тогда  $c = c_{t_1}$  есть скорость поперечных волн в первой среде. Для поперечной же отраженной волны имеем тоже  $c' = c_{t_1}$ , и потому (22,16) даст

$$\theta = \theta',$$

т. е. угол падения равен углу отражения. Для продольной же отраженной волны имеем  $c' = c_{l_1}$ , и потому

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t_1}}{c_{l_1}}.$$

Для поперечной части преломленной волны имеем  $c' = c_{t_2}$  и при поперечной же падающей волне имеем

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t_1}}{c_{t_2}}.$$

Аналогично для продольной преломленной волны имеем

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t_1}}{c_{l_2}}.$$

### Задачи

1. Определить коэффициент отражения продольной монохроматической волны, падающей под произвольным углом на границу тела с вакуумом.

**Решение.** При отражении под произвольным углом возникают как продольная, так и поперечная отраженные волны. Из соображений симметрии заранее ясно, что вектор смещения в поперечной отраженной волне будет лежать целиком в плоскости падения (рис. 20;  $n_0$ ,  $n_l$ ,  $n_t$  — единичные векторы вдоль направлений падающей, продольной и поперечной отраженных волн, а  $u_0$ ,  $u_l$ ,  $u_t$  — соответствующие векторы смещений). Полное смещение в теле равно сумме (общий множитель  $e^{-i\omega t}$  для краткости опускаем)

$$u = A_0 n_0 e^{ik_0 r} + A_l n_l e^{ik_l r} + A_t [an_t] e^{ik_t r}$$

Рис. 20.

( $a$  — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости падения). Абсолютные величины волновых векторов равны:  $k_0 = k_l = \omega/c_l$ ,  $k_t = \omega/c_t$ , а углы падения  $\theta_0$  и отражения  $\theta_l$ ,  $\theta_t$  связаны посредством  $\theta_l = \theta_0$ ,  $\sin \theta_t = \sin \theta_0 \frac{c_t}{c_l}$ . Для компонент тензора деформации на границе тела получаем

$$u_{xx} = ik_0 (A_0 + A_l) \cos^2 \theta_0 + i A_l k_l \cos \theta_t \sin \theta_t,$$

$$u_{ll} = ik_0 (A_0 + A_l),$$

$$u_{xy} = ik_0 (A_0 - A_l) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{i}{2} A_l k_l (\cos^2 \theta_t - \sin^2 \theta_t)$$

(общие экспоненциальные множители опускаем). Компоненты тензора напряжений вычисляем по общей формуле (5,11), которую удобно писать здесь в виде

$$\sigma_{ik} = 2\rho c_t^2 u_{ik} + \rho (c_t^2 - 2c_l^2) u_{ll} \delta_{ik}.$$

Границные условия на свободной поверхности среды гласят  $\sigma_{ik}n_k = 0$ , откуда  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ , и дают два уравнения, из которых можно выразить  $A_l$ ,  $A_t$  через  $A_0$ . В результате вычисления получается

$$A_l = A_0 \frac{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t},$$

$$A_t = -A_0 \frac{2c_l c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t}.$$

При  $\theta_0 = 0$  имеем  $A_l = -A_0$ ,  $A_t = 0$ , т. е. волна отражается целиком как продольная. Отношение перпендикулярной к поверхности среды компоненты плотности потока энергии в отраженной продольной волне к такому же потоку в падающей волне есть

$$R_l = \left| \frac{A_l}{A_0} \right|^2.$$

Аналогичное отношение для отраженной поперечной волны есть

$$R_t = \frac{c_t \cos \theta_t}{c_l \cos \theta_0} \left| \frac{A_t}{A_0} \right|^2.$$

Разумеется,  $R_l + R_t = 1$ .

2. То же, если падающая волна поперечная (и направление колебаний в ней лежит в плоскости падения)<sup>1)</sup>.

Решение. Волна отражается в виде поперечной же и продольной волн, причем  $\theta_t = \theta_0$ ,  $c_t \sin \theta_l = c_l \sin \theta_0$ . Полный вектор смещения:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{a}_{n0}] A_0 e^{i\mathbf{k}_0 r} + n_l A_l e^{i\mathbf{k}_l r} + [\mathbf{a}_{nt}] A_t e^{i\mathbf{k}_t r}.$$

Для амплитуд отраженных волн получаются выражения

$$\frac{A_t}{A_0} = \frac{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0},$$

$$\frac{A_l}{A_0} = \frac{2c_l c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0}.$$

3. Определить частоты радиальных собственных колебаний упругого шара радиуса  $R$ .

Решение. Выбираем сферические координаты с началом в центре шара. При радиальных колебаниях  $\mathbf{u}$  направлено по радиусу и зависит только от  $r$  (и от  $t$ ). Поэтому  $\mathbf{u} = 0$ . Введем «потенциал» смещения  $\Phi$  согласно  $u_r = u = -\partial \Phi / \partial r$ . Выраженное через  $\Phi$  уравнение движения сводится к волновому уравнению  $c_l^2 \Delta \Phi = \ddot{\Phi}$ , или для периодических по времени ( $\sim e^{-i\omega t}$ ) колебаний:

$$\Delta \Phi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -k^2 \Phi, \quad k = \frac{\omega}{c_l}. \quad (1)$$

Решение, конечное во всем объеме шара, включая его центр, есть

$$\Phi = A \frac{\sin kr}{r}$$

<sup>1)</sup> Если колебания перпендикулярны плоскости падения, то волна отражается целиком в виде та же волны, так что  $R_t = 1$ .

(временной множитель не пишем). Радиальные напряжения:

$$\sigma_{rr} = \rho \{ (c_l^2 - 2c_t^2) u_{tt} + 2c_t^2 u_{rr} \} = \rho \{ (c_l^2 - 2c_t^2) \Delta \Phi + 2c_t^2 \Phi'' \}$$

или, используя уравнение (1):

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{rr} = -\omega^2 \Phi - 4c_t^2 \frac{1}{r} \Phi'. \quad (2)$$

Границочное условие  $\sigma_{rr}(R) = 0$  приводит к уравнению

$$\frac{\operatorname{tg} kR}{kR} = \frac{1}{1 - (kR c_l / 2c_t)^2}. \quad (3)$$

Его корни определяют частоты собственных колебаний  $\omega = c_l k$ .

4. Определить частоту радиальных колебаний сферической полости в неограниченной упругой среде, для которой  $c_l \gg c_t$ .

**Решение.** В неограниченной среде радиальные колебания полости сопровождаются излучением продольных звуковых волн, что приводит к потере энергии и тем самым к затуханию колебаний. При  $c_l \gg c_t$  (т. е.  $K \gg \mu$ ) это излучение будет слабым и можно говорить о собственных частотах колебаний с малым коэффициентом затухания.

Ищем решение уравнения (1) в виде расходящейся сферической волны

$$\Phi = A \frac{e^{ikr}}{r}, \quad k = \frac{\omega}{c_l}$$

и с помощью (2) получаем из граничного условия  $\sigma_{rr}(R) = 0$

$$\left( kR \frac{c_l}{c_t} \right)^2 = 4 \left( 1 - ikR \right).$$

Отсюда (при  $c_l \gg c_t$ )

$$\omega = \frac{2c_t}{R} \left( 1 - i \frac{c_t}{c_l} \right).$$

Вещественная часть  $\omega$  дает собственную частоту колебаний, а мнимая — коэффициент затухания; в несжимаемой среде ( $c_l \rightarrow \infty$ ) затухание, естественно, отсутствовало бы. Эти колебания — специфический результат сопротивляемости среды по отношению к сдвигу ( $\mu \neq 0$ ). Обратим внимание на то, что для них  $kR = 2c_t/c_l \ll 1$ , т. е. соответствующая этим колебаниям длина волны велика по сравнению с  $R$  (интересно сравнить это с колебаниями упругой сферы, для которых при  $c_l \gg c_t$  первая собственная частота определяется согласно (3) из  $kR = \pi$ ).

## § 23. Упругие волны в кристаллах

Распространение упругих волн в анизотропной среде, т. е. в кристаллах, подчиняется более сложным закономерностям, чем распространение волн в изотропном теле. Для исследования таких волн надо обратиться к общим уравнениям движения

$$\rho \ddot{u}_l = \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_k}$$

и воспользоваться для  $\sigma_{lk}$  общим выражением (10,3)

$$\sigma_{lk} = \lambda_{ikhlm} u_{lm}.$$