При $\theta = 0$ имеем

$$\rho\omega_{1,2}^2 = k^2 d, \quad \rho\omega_3^2 = k^2 f;$$

волна *3* продольна, волны *1* и *2* поперечны.

§ 24. Поверхностные волны

Особым видом упругих волн являются волны, распространяющиеся вблизи поверхности среды и не проникающие в глубь нее — *волны Рэлея* (*Rayleigh*, 1885).

Напишем уравнения движения в виде (22,11—12):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \tag{24,1}$$

(где u — какая-либо из компонент векторов $\mathbf{u}_l$, $\mathbf{u}_t$, а c — соответствующая ей скорость c_l или c_t), и будем искать решения, отвечающие поверхностным волнам. Поверхность упругой среды будем предполагать плоской, и выберем ее в качестве плоскости x, y; области среды пусть соответствуют $z < 0$.

Рассмотрим «плоскую» монохроматическую поверхностную волну, распространяющуюся вдоль оси x; функция $u(t, x, z)$ в ней имеет вид

$$u = e^{i(kx-\omega t)} f(z),$$

где функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению $f'' = \varkappa^2 f$; введено обозначение

$$\varkappa = (k^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}. \tag{24,2}$$

Если $k^2 - \omega^2/c^2 < 0$, то $f(z)$ — периодическая функция, т. е. мы получили бы обычную плоскую волну, не исчезающую во всем объеме среды. Поэтому надо считать, что $k^2 - \omega^2/c^2 \geqslant 0$, и $\varkappa$ — вещественное число. Уравнение имеет решения вида $\exp(\pm\varkappa z)$; из них надо выбрать то, которое затухает при $z \to -\infty$.

Таким образом, мы приходим к следующему решению уравнений движения:

$$u = \mathrm{const}\, e^{i(kx-\omega t)} e^{\varkappa z}. \tag{24,3}$$

Оно соответствует волне, быстро (экспоненциально) затухающей внутрь тела, т. е. распространяющейся только вблизи его поверхности. Величина $\varkappa$ определяет скорость этого затухания.

Истинный вектор деформации $\mathbf{u}$ в волне является суммой векторов $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_t$, компоненты каждого из которых удовлетворяют уравнению (24,1) со скоростью $c = c_l$ для $\mathbf{u}_l$ и $c = c_t$ для $\mathbf{u}_t$. В случае объемных волн в неограниченной среде эти две части представляют собой две независимо распространяющиеся волны. В случае же поверхностных волн такое разделение на две независимые части оказывается (благодаря наличию граничных условий) невозможным. Вектор смещения $\mathbf{u}$ должен быть определенной линейной комбинацией векторов $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_t$. По поводу этих последних надо также отметить, что они отнюдь не имеют теперь наглядного смысла

параллельных и перпендикулярных к направлению распространения компонент смещения.

Для определения линейной комбинации векторов $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_t$, дающей истинное смещение $\mathbf{u}$, надо обратиться к предельным условиям на границе тела. Отсюда же определится связь между волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой ω, а следовательно, и скорость распространения волны. На свободной поверхности должно выполняться условие $\sigma_{ik}n_k = 0$. Поскольку вектор нормали $\mathbf{n}$ направлен по оси z, то отсюда следуют условия

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0,$$

откуда

$$u_{xz} = 0, \qquad u_{yz} = 0, \qquad \sigma(u_{xx} + u_{yy}) + (1 - \sigma)u_{zz} = 0. \qquad (24,4)$$

Поскольку все величины не зависят от координаты y, то второе из этих условий дает

$$u_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial u_y}{\partial z} = 0.$$

С учетом (24,3) отсюда следует

$$u_y = 0. \qquad (24,5)$$

Таким образом, в поверхностной волне вектор деформации $\mathbf{u}$ лежит в плоскости, проведенной через направление распространения перпендикулярно к поверхности.

«Поперечная» часть волны $\mathbf{u}_t$ должна удовлетворять условию (22,8) $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$, или

$$\frac{\partial u_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{tz}}{\partial z} = 0.$$

Ввиду (24,3) это условие приводит к равенству

$$iku_{tx} + \varkappa_t u_{tz} = 0,$$

определяющему отношение u_{tx}/u_{tz}. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} u_{tx} &= \varkappa_t a \exp(ikx + \varkappa_t z - i\omega t), \\ u_{tz} &= -ika \exp(ikx + \varkappa_t z - i\omega t), \end{aligned} \qquad (24,6)$$

где a — постоянная.

«Продольная» часть $\mathbf{u}_l$ удовлетворяет условию (22,9) $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$, или

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$iku_{lz} - \varkappa_l u_{lx} = 0, \qquad \varkappa_l = (k^2 - \omega^2/c_l^2)^{1/2}.$$

Таким образом, должно быть

$$u_{lx} = kbe^{ikx+\varkappa_l z-i\omega t}, \qquad u_{lz} = -i\varkappa_l be^{ikx+\varkappa_l z-i\omega t}, \qquad (24,7)$$

где b — постоянная.

Теперь воспользуемся первым и третьим из условий (24,4). Выражая u_{ik} через производные от u_i и вводя скорости c_l и c_t, переписываем эти условия в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}=0,$$
$$c_l^2\frac{\partial u_z}{\partial z}+(c_l^2-2c_t^2)\frac{\partial u_x}{\partial x}=0. \tag{24,8}$$

Сюда надо подставить

$$u_x=u_{lx}+u_{tx},\qquad u_z=u_{lz}+u_{tz}.$$

В результате первое из условий (24,8) дает уравнение

$$a(k^2+\varkappa_l^2)+2bk\varkappa_l=0. \tag{24,9}$$

Второе приводит к равенству

$$2ac_t^2\varkappa_t k+b\left[c_l^2(\varkappa_l^2-k^2)+2c_t^2k^2\right]=0,$$

или

$$2a\varkappa_t k+b(k^2+\varkappa_t^2)=0. \tag{24,10}$$

Условие совместности двух однородных уравнений (24,9) и (24,10) дает

$$(k^2+\varkappa_l^2)^2=4k^2\varkappa_t\varkappa_l,$$

или, возведя в квадрат и подставив значения $\varkappa_t$, $\varkappa_l$:

$$\left(2k^2-\frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4=16k^4\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_t^2}\right)\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_l^2}\right). \tag{24,11}$$

Этим уравнением определяется связь между ω и k. Очевидно, что $\omega=\mathrm{const}\cdot k$; для определения коэффициента пропорциональности, напишем это соотношение в виде

$$\omega=c_t k\xi. \tag{24,12}$$

Тогда общий множитель k^8 сокращается и, раскрыв скобки, получим для ξ уравнение

$$\xi^6-8\xi^4+8\xi^2\left(3-2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)-16\left(1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)=0. \tag{24,13}$$

Отсюда видно, что число ξ зависит только от отношения c_t/c_l, являющегося некоторой характерной для каждого данного вещества постоянной и зависящего в свою очередь только от коэффициента Пуассона:

$$\frac{c_t^2}{c_l^2}=\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}.$$

Величина ξ должна быть, разумеется, вещественной положительной, причем $\xi<1$ (так, чтобы $\varkappa_t$, $\varkappa_l$ были вещественны). Уравнение (24,13) имеет только один корень, удовлетворяющий этим

условиям, так что для каждого данного значения c_t/c_l получается всего одно определенное значение ξ [1]).

Таким образом, для поверхностных волн, как и для объемных, частота пропорциональна волновому вектору. Коэффициент пропорциональности между ними есть скорость распространения волны

$$U = c_t\xi. \qquad (24,14)$$

Этим определяется скорость распространения поверхностных волн через скорости c_t и c_l поперечных и продольных объемных волн. Отношение амплитуд поперечной и продольной частей волны определяется по значению ξ формулой

$$\frac{a}{b} = -\frac{2-\xi^2}{2\sqrt{1-\xi^2}}. \qquad (24,15)$$

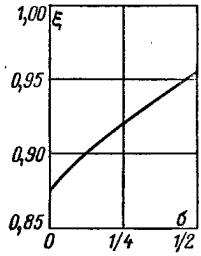

Рис. 21

Отношение c_t/c_l фактически меняется для различных веществ в пределах от $1/\sqrt{2}$ до 0, что соответствует изменению σ от 0 до 1/2; при этом ξ меняется от 0,874 до 0,955. На рис. 21 дан график зависимости ξ от σ.

Задача

Плоскопараллельный пласт толщины h (среда *1*) лежит на упругом полупространстве (среда *2*). Определить зависимость частоты от волнового вектора для поперечных волн в пласте с направлением колебаний, параллельным границам пласта.

Решение. Выберем плоскость раздела между пластом и полупространством в качестве плоскости x, y, причем упругому полупространству соответствуют $z \leqslant 0$, а пласту $h \geqslant z \geqslant 0$. В пласте имеем

$$u_{x1} = u_{z1} = 0, \qquad u_{y1} = f(z)\, e^{i(kx-\omega t)},$$

а в среде *2* пишем затухающую в глубь нее волну:

$$u_{x2} = u_{z2} = 0, \qquad u_{y2} = Ae^{\varkappa_2 z}e^{i(kx-\omega t)}, \qquad \varkappa_2 = \left(k^2 - \omega^2/c_{t2}^2\right)^{1/2}.$$

Для функции $f(z)$ имеем уравнение

$$f'' + \varkappa_1^2 f = 0, \qquad \varkappa_1 = \left(\omega^2/c_{t1}^2 - k^2\right)^{1/2}$$

(мы увидим ниже, что должно быть $\varkappa_1^2 > 0$), откуда

$$f(z) = B\sin\varkappa_1 z + C\cos\varkappa_1 z.$$

На свободной границе пласта ($z = h$) должно быть $\sigma_{zy} = 0$, т. е. $\partial u_{y1}/\partial z = 0$. На границе же между обеими средами ($z = 0$) имеем условия

$$u_{y1} = u_{y2}, \qquad \mu_1\frac{\partial u_{y1}}{\partial z} = \mu_2\frac{\partial u_{y2}}{\partial z}$$

---

[1]) При переходе от уравнения (24,11) к (24,13) теряется корень $\omega^2 = 0$ ($\varkappa_t = \varkappa_l = k$), которому отвечает значение $\xi = 0$, тоже удовлетворяющее условию $\xi \leqslant 1$. Из уравнений (24,9—10) видно, однако, что этому корню соответствует равенство $a = -b$, и потому полное смещение $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t = 0$, т. е. движение вообще отсутствует.

(μ_1, μ_2 — модули сдвига обеих сред). Из этих условий находим три уравнения для A, B, C, условие совместности которых дает

$$\operatorname{tg} \varkappa_1 h = \mu_2 \varkappa_2 / \mu_1 \varkappa_1.$$

Это уравнение определяет в неявном виде зависимость ω от k; оно имеет решения лишь при вещественных $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, так что всегда $c_{t2} > \omega/k > c_{t1}$. Отсюда видно, что распространение рассматриваемых волн возможно лишь при условии $c_{t2} > c_{t1}$.

§ 25. Колебания стержней и пластинок

Волны, распространяющиеся в тонких пластинках и стержнях, существенно отличаются от волн, распространяющихся в среде, неограниченной во всех направлениях. При этом речь идет о волнах, длина которых велика по сравнению с толщиной стержня или пластинки. В обратном предельном случае длин волн, малых по сравнению с этой толщиной, стержень или пластинку можно было бы вообще рассматривать как неограниченные во всех направлениях, и мы получили бы снова соотношения, имевшие место в неограниченных средах.

Необходимо различать волны, в которых колебания происходят параллельно оси стержня или плоскости пластинки, от волн с перпендикулярными колебаниями. Начнем с изучения продольных волн в стержнях.

Продольная деформация стержня (однородная вдоль его сечения), на боковую поверхность которого не действуют никакие внешние силы, представляет собой простое растяжение или сжатие. Таким образом, продольные волны в стержне представляют собой распространяющиеся вдоль его длины простые растяжения или сжатия. Но при простом растяжении отлична от нуля только компонента σ_{zz} тензора напряжений (ось z — вдоль длины стержня), связанная с тензором деформации посредством (см. § 5)

$$\sigma_{zz} = E u_{zz} = E \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Подставляя это в общее уравнение движения

$$\rho \ddot{u}_z = \frac{\partial \sigma_{zk}}{\partial x_k},$$

находим

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0. \qquad (25,1)$$

Это есть уравнение продольных колебаний в стержнях. Мы видим, что оно имеет вид обычного волнового уравнения. Скорость распространения продольных волн в стержнях оказывается равной

$$(E/\rho)^{1/2}. \qquad (25,2)$$

Сравнив ее с выражением (22,4) для c_l, видим, что она меньше скорости распространения продольных волн в неограниченной среде.