

(μ_1, μ_2 — модули сдвига обеих сред). Из этих условий находим три уравнения для A, B, C , условие совместности которых дает

$$\operatorname{tg} \kappa_1 h = \mu_2 x_2 / \mu_1 x_1.$$

Это уравнение определяет в неявном виде зависимость ω от k ; оно имеет решения лишь при вещественных x_1 и x_2 , так что всегда $c_{t2} > \omega/k > c_{t1}$. Отсюда видно, что распространение рассматриваемых волн возможно лишь при условии $c_{t2} > c_{t1}$.

§ 25. Колебания стержней и пластинок

Волны, распространяющиеся в тонких пластинах и стержнях, существенно отличаются от волн, распространяющихся в среде, неограниченной во всех направлениях. При этом речь идет о волнах, длина которых велика по сравнению с толщиной стержня или пластиинки. В обратном предельном случае длины волн, малых по сравнению с этой толщиной, стержень или пластинку можно было бы вообще рассматривать как неограниченные во всех направлениях, и мы получили бы снова соотношения, имевшие место в неограниченных средах.

Необходимо различать волны, в которых колебания происходят параллельно оси стержня или плоскости пластиинки, от волн с перпендикулярными колебаниями. Начнем с изучения продольных волн в стержнях.

Продольная деформация стержня (однородная вдоль его сечения), на боковую поверхность которого не действуют никакие внешние силы, представляет собой простое растяжение или сжатие. Таким образом, продольные волны в стержне представляют собой распространяющиеся вдоль его длины простые растяжения или сжатия. Но при простом растяжении отлична от нуля только компонента σ_{zz} тензора напряжений (ось z — вдоль длины стержня), связанная с тензором деформации посредством (см. § 5)

$$\sigma_{zz} = Eu_{zz} = E \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Подставляя это в общее уравнение движения

$$\rho \ddot{u}_z = \frac{\partial \sigma_{zh}}{\partial x_h},$$

находим

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0. \quad (25,1)$$

Это есть уравнение продольных колебаний в стержнях. Мы видим, что оно имеет вид обычного волнового уравнения. Скорость распространения продольных волн в стержнях оказывается равной

$$(E/\rho)^{1/2}. \quad (25,2)$$

Сравнив ее с выражением (22,4) для c_l , видим, что она меньше скорости распространения продольных волн в неограниченной среде.

Перейдем теперь к продольным волнам в тонких пластинках. Уравнения движения для таких колебаний можно написать сразу, подставив в уравнениях равновесия (13,4) — $\rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$ и $-\rho h \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$ вместо P_x и P_y :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{1 - \sigma^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1 + \sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1 - \sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{1 - \sigma^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1 + \sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1 - \sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (25,3)$$

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x , т. е. волну, в которой деформация зависит только от координаты x , но не от y . Тогда уравнения (25,3) сильно упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho(1 - \sigma^2)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{E}{2\rho(1 + \sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0. \quad (25,4)$$

Мы получаем, таким образом, опять простые волновые уравнения. Стоящие в них коэффициенты различны для u_x и u_y . Скорость распространения волны с колебаниями, параллельными направлению распространения (u_x), равна

$$\left(\frac{E}{\rho(1 - \sigma^2)} \right)^{1/2}. \quad (25,5)$$

Скорость же волны (u_y) с колебаниями, перпендикулярными направлению распространения (но по-прежнему лежащими в плоскости пластинки), равна скорости c_t поперечных волн в неограниченной среде.

Мы видим, таким образом, что продольные волны в стержнях и пластинках обладают таким же характером, как и волны в неограниченной среде, отличаясь лишь величиной своей скорости, по-прежнему не зависящей от частоты. Совсем иные соотношения получаются для волн изгиба в пластинках и стержнях, при которых колебания происходят в направлении, перпендикулярном к оси стержня или плоскости пластинки, т. е. сопровождаются их изгибом.

Уравнения свободных колебаний пластинки можно написать непосредственно на основании уравнения равновесия (12,5). Для этого надо заменить в нем $-P$ произведением ускорения ζ на массу ρh , приходящуюся на единицу площади поверхности пластиинки. Таким образом, получаем

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \Delta^2 \zeta = 0 \quad (25,6)$$

(Δ — двухмерный оператор Лапласа).

Рассмотрим монохроматическую упругую волну, соответственно чему будем искать решение уравнения (25,6) в виде

$$\zeta = \text{const} \cdot e^{i(kr - \omega t)} \quad (25,7)$$

(волновой вектор \mathbf{k} имеет, конечно, всего две компоненты k_x и k_y). Подстановка в (25,6) приводит к уравнению

$$-\rho\omega^2 + \frac{D}{h} k^4 = 0.$$

Отсюда получаем следующее соотношение между частотой и, волновым вектором волны:

$$\omega = k^2 \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2} = k^2 \left(\frac{h^2 E}{12\rho(1-\sigma^2)} \right)^{1/2}. \quad (25,8)$$

Таким образом, частота оказывается пропорциональной квадрату абсолютной величины волнового вектора, в то время как в волнах в неограниченной среде она пропорциональна первой ее степени.

Зная закон дисперсии волн, можно найти скорость их распространения согласно формуле (23,4). В данном случае находим

$$U = \left[\frac{h^2 E}{3\rho(1-\sigma^2)} \right]^{1/2} k. \quad (25,9)$$

Таким образом, скорость распространения волн изгиба по пластинке пропорциональна волновому вектору, а не постоянна, как для волн в неограниченной трехмерной среде¹⁾.

Аналогичные результаты справедливы и для волн изгиба тонких стержней; колебания изгиба предполагаются малыми. Уравнения движения получим, заменив в уравнениях равновесия слабо изогнутого стержня (20,4) силы $-K_x$, $-K_y$ произведениями ускорений \ddot{X} , \ddot{Y} на массу ρS единицы длины стержня (S — площадь его сечения). Таким образом,

$$\rho S \ddot{X} = EI_y \frac{\partial^4 X}{\partial z^4}, \quad \rho S \ddot{Y} = EI_x \frac{\partial^4 Y}{\partial z^4}. \quad (25,10)$$

Решение этих уравнений снова ищем в виде

$$X = \text{const} \cdot e^{i(kz - \omega t)}, \quad Y = \text{const} \cdot e^{i(kz - \omega t)},$$

и находим следующий закон дисперсии:

$$\omega^{(x)} = \left(\frac{EI_y}{\rho S} \right)^{1/2} k^2, \quad \omega^{(y)} = \left(\frac{EI_x}{\rho S} \right)^{1/2} k^2 \quad (25,11)$$

для колебаний вдоль осей x и y . Соответствующие скорости распространения:

$$U^{(x)} = 2 \left(\frac{EI_y}{\rho S} \right)^{1/2} k, \quad U^{(y)} = 2 \left(\frac{EI_x}{\rho S} \right)^{1/2} k. \quad (25,12)$$

Наконец, рассмотрим крутильные колебания стержня. Уравнение движения стержня, подвергаемого деформации кручения,

¹⁾ Волновой вектор $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны. Поэтому, согласно (25,9), скорость U должна была бы неограниченно возрастать при $\lambda \rightarrow 0$. Физическая бессмыслица этого результата связана с тем, что формула (25,9) в действительности неприменима к слишком коротким волнам.

получается приравниванием выражения $C \frac{d\tau}{dz}$ (см. § 16, 18) производной по времени от момента импульса единицы длины стержня. Этот момент равен $\rho I \frac{d\phi}{dt}$, где $\frac{d\phi}{dt}$ — угловая скорость вращения (ϕ — угол поворота данного сечения), а

$$I = \int (x^2 + y^2) df$$

— момент инерции сечения стержня относительно его центра инерции (при чисто крутильных колебаниях каждое сечение совершает вращательные колебания вокруг оси инерции стержня, остающейся неподвижной). Написав $\tau = \frac{d\phi}{dz}$, находим уравнение движения в виде

$$C \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (25,13)$$

Отсюда видно, что скорость распространения крутильных колебаний вдоль стержня равна

$$(C/\rho I)^{1/2}. \quad (25,14)$$

Задачи

1. Определить частоты продольных собственных колебаний стержня (длины l), один из концов которого закреплен, а другой — свободен.

Решение. На закрепленном конце ($z = 0$) должно быть $u_z = 0$, а на свободном конце ($z = l$) $\sigma_{zz} = Eu_{zz} = 0$, т. е. $\frac{du_z}{dz} = 0$. Ищем решение уравнения (25,1) в виде

$$u_z = A \cos (\omega t + \alpha) \sin kz, \quad k = \omega (\rho/E)^{1/2}.$$

Из условия при $z = l$ имеем $\cos kl = 0$, откуда для собственных частот находим

$$\omega = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \frac{\pi}{2l} (2n + 1)$$

(n — целые числа).

2. То же для стержня, оба конца которого свободны или оба закреплены. Решение. В обоих случаях

$$\omega = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \frac{\pi}{l} n.$$

3. Определить частоты собственных колебаний струны (длины l). Решение. Уравнение движения струны:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\rho S}{T} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

(ср. уравнение равновесия (20,17)). Границные условия: $X = 0$ при $z = 0, l$. Собственные частоты:

$$\omega = \left(\frac{\rho S}{T} \right)^{1/2} \frac{n\pi}{l}.$$

4. Определить частоты поперечных собственных колебаний стержня (длины l) с заделанными концами.

Решение. Уравнение (25,10) при подстановке в него

$$X = X_0(z) \cos (\omega t + \alpha)$$

приобретает вид

$$\frac{d^4 X_0}{dz^4} = \kappa^4 X_0, \quad \kappa^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{EI_y}.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$X_0 = A \cos \kappa z + B \sin \kappa z + C \operatorname{ch} \kappa z + D \operatorname{sh} \kappa z.$$

Постоянные A, B, C, D определяются из граничных условий $X = 0, dX/dz = 0$ при $z = 0, l$. В результате находим

$$X_0 = A \{(\sin \kappa l - \operatorname{sh} \kappa l) (\cos \kappa z - \operatorname{ch} \kappa z) - (\cos \kappa l - \operatorname{ch} \kappa l) (\sin \kappa z - \operatorname{sh} \kappa z)\}$$

и уравнение

$$\cos \kappa l \operatorname{ch} \kappa l = 1,$$

корни которого определяют собственные частоты колебаний. Наименьшая из собственных частот равна

$$\omega_{\min} = \frac{22,4}{l^2} \frac{EI_y}{\rho S}.$$

5. То же для стержня с опертыми концами.

Решение аналогично решению задачи 4. Результат:

$$X_0 = A \sin \kappa z,$$

а частоты определяются из $\sin \kappa l = 0$, т. е.

$$\kappa = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Наименьшая частота есть

$$\omega_{\min} = \frac{9,87}{l^2} \frac{EI_y}{\rho S}.$$

6. То же для стержня, заделанного на одном конце и свободного на другом. Решение. Получаем для смещения

$$X_0 = A \{(\cos \kappa l + \operatorname{ch} \kappa l) (\cos \kappa z - \operatorname{ch} \kappa z) + (\sin \kappa l - \operatorname{sh} \kappa l) (\sin \kappa z - \operatorname{sh} \kappa z)\}$$

(закрепленный конец $z = 0$, свободный $z = l$), и уравнение

$$\cos \kappa l \operatorname{ch} \kappa l + 1 = 0$$

для собственных частот. Наименьшая частота есть

$$\omega_{\min} = \frac{3,52}{l^2} \frac{EI_y}{\rho S}.$$

7. Определить собственные колебания прямоугольной пластинки (длины сторон a и b) с опертыми краями.

Решение. Уравнение (25,6) при подстановке в него

$$\zeta = \zeta_0(x, y) \cos(\omega t + \alpha)$$

приобретает вид

$$\Delta \Delta \zeta_0 - \kappa^4 \zeta_0 = 0, \quad \kappa^4 = \omega^2 \frac{12\rho(1-\sigma^2)}{h^2 E}.$$

Выбираем оси координат по сторонам пластинки. Границные условия (12,11) приобретают вид

$$\text{при } x = 0, a: \quad \zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y = 0, b: \quad \zeta = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0.$$

Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\zeta_0 = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

(m, n — целые числа), причем частоты определяются равенством

$$\omega = \frac{Eh}{12\rho(1-\sigma^2)} \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right].$$

8. Определить собственные частоты колебаний мембранны прямоугольной формы (с длинами сторон a и b).

Решение. Уравнение колебаний мембранны

$$T \Delta \zeta = \rho h \ddot{\zeta}$$

(ср. уравнение равновесия (14,9)). Края мембранны должны быть закреплены так, что $\zeta = 0$. Соответствующее решение для прямоугольной мембранны есть

$$\zeta = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t,$$

где собственные частоты

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho h} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

(m, n — целые числа).

9. Определить скорость распространения крутильных колебаний по стержням с сечением в виде круга, эллипса и равностороннего треугольника и по стержню, имеющему вид длинной прямоугольной тонкой пластинки.

Решение. Для кругового сечения (радиуса R) момент инерции $I = \pi R^4/2$; взяв C из задачи 1 § 16, получим для скорости значение $(\mu/\rho)^{1/2}$, совпадающее со скоростью c_t .

Аналогично (используя результаты задач 2—4 § 16) получаем для стержня эллиптического сечения скорость

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} c_t;$$

для стержня с сечением в виде равностороннего треугольника

$$\left(\frac{3}{5} \right)^{1/2} c_t;$$

для стержня в виде длинной прямоугольной пластинки

$$2 \frac{h}{d} c_t.$$

Все эти скорости меньше c_t .

10. Поверхность бесконечно глубокой несжимаемой жидкости покрыта тонкой упругой пластинкой. Определить связь между волновым вектором и частотой для волн, одновременно распространяющихся по пластинке и в поверхности слое жидкости.

Решение. Выбираем плоскость пластинки в качестве плоскости $z = 0$, а ось x выбираем вдоль направления распространения волны; области жидкости пусть соответствуют $z < 0$. Уравнение движения свободной пластинки есть

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -D \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}$$

(ρ_0 — плотность материала пластинки). При наличии жидкости к правой стороне этого уравнения надо прибавить силу, действующую со стороны жидкости на 1 см^2 поверхности пластинки, т. е. давление ρ жидкости. Но давление в волне выражается через потенциал скорости посредством $\rho = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ (полем тяжести пренебрегаем). Поэтому получаем уравнение

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -D \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0}. \quad (1)$$

Далее, нормальная компонента скорости жидкости на ее поверхности должна быть равна скорости точек пластинки, откуда получаем условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (2)$$

Потенциал Φ должен удовлетворять во всем объеме жидкости уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Ищем ζ в виде бегущей волны $\zeta = \zeta_0 e^{ikx-i\omega t}$; соответственно этому берем решение уравнения (3) в виде затухающей в глубь жидкости поверхностной волны

$$\Phi = \Phi_0 e^{i(kx-\omega t)} e^{kz}.$$

Подстановка этих выражений в (1) и (2) приводит к двум уравнениям для Φ_0 и ζ_0 , из условия совместности которых получаем

$$\omega^2 = D \frac{k^5}{(\rho + h\rho_0 k)}.$$

§ 26. Ангармонические колебания

Вся изложенная теория упругих колебаний является приближенной в том же смысле, в каком приближена вообще вся теория упругости, основанная на законе Гука. Напомним, что в ее основе лежит разложение упругой энергии в ряд по степеням тензора деформации, причем оставляются члены до второго порядка включительно. Соответственно этому компоненты тензора напряжений оказываются линейными функциями компонент тензора деформации, и уравнения движения — линейны.

Наиболее характерной особенностью упругих волн в этом приближении является то, что всякую волну можно представить в виде простого наложения, т. е. в виде линейной комбинации отдельных монохроматических волн. Каждая из этих монохроматических волн распространяется независимо от остальных и может существовать также и сама по себе, не сопровождаясь какими-либо посторонними движениями. Можно сказать, что различные монохроматические волны, одновременно распространяющиеся в одной и той же среде, «не взаимодействуют» друг с другом.