Решение. Выбираем плоскость пластинки в качестве плоскости $z = 0$, а ось x выбираем вдоль направления распространения волны; области жидкости пусть соответствуют $z < 0$. Уравнение движения свободной пластинки есть

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -D \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}$$

(ρ_0 — плотность материала пластинки). При наличии жидкости к правой стороне этого уравнения надо прибавить силу, действующую со стороны жидкости на 1 см^2 поверхности пластинки, т. е. давление p жидкости. Но давление в волне выражается через потенциал скорости посредством $p = -\rho\, \partial\varphi/\partial t$ (полем тяжести пренебрегаем). Поэтому получаем уравнение

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -D \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - \rho \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=0}. \tag{1}$$

Далее, нормальная компонента скорости жидкости на ее поверхности должна быть равна скорости точек пластинки, откуда получаем условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=0}. \tag{2}$$

Потенциал φ должен удовлетворять во всем объеме жидкости уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Ищем ζ в виде бегущей волны $\zeta = \zeta_0 e^{ikx - i\omega t}$; соответственно этому берем решение уравнения (3) в виде затухающей в глубь жидкости поверхностной волны

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{kz}.$$

Подстановка этих выражений в (1) и (2) приводит к двум уравнениям для φ_0 и ζ_0, из условия совместности которых получаем

$$\omega^2 = D \frac{k^5}{(\rho + h\rho_0 k)}.$$

§ 26. Ангармонические колебания

Вся изложенная теория упругих колебаний является приближенной в том же смысле, в каком приближенна вообще вся теория упругости, основанная на законе Гука. Напомним, что в ее основе лежит разложение упругой энергии в ряд по степеням тензора деформации, причем оставляются члены до второго порядка включительно. Соответственно этому компоненты тензора напряжений оказываются линейными функциями компонент тензора деформации, и уравнения движения — линейны.

Наиболее характерной особенностью упругих волн в этом приближении является то, что всякую волну можно представить в виде простого наложения, т. е. в виде линейной комбинации отдельных монохроматических волн. Каждая из этих монохроматических волн распространяется независимо от остальных и может существовать также и сама по себе, не сопровождаясь какими-либо посторонними движениями. Можно сказать, что различные монохроматические волны, одновременно распространяющиеся в одной и той же среде, «не взаимодействуют» друг с другом.

Все эти свойства, однако, исчезают при переходе к следующим приближениям. Эффекты следующих приближений хотя и являются малыми, но для некоторых явлений могут играть основную роль. Эти эффекты обычно называют *ангармоническими* в связи с тем, что соответствующие уравнения движения нелинейны и не допускают простых периодических (гармонических) решений.

Мы рассмотрим здесь ангармонические эффекты третьего порядка, происходящие от кубических по деформации членов в упругой энергии. В общем виде соответствующие уравнения движения оказываются очень громоздкими. Выяснить же характер возникающих эффектов можно с помощью следующих рассуждений. Кубические члены в упругой энергии дают квадратичные члены в тензоре напряжений, а потому и в уравнениях движения. Представим себе, что в этих уравнениях все линейные члены перенесены в левые, а все квадратичные — в правые стороны равенств. Решая эти уравнения методом последовательных приближений, мы должны в первом приближении вовсе отбросить квадратичные члены. Тогда останутся обычные линейные уравнения, решение $\mathbf{u}_0$ которых может быть представлено в виде наложения монохроматических бегущих волн вида $\mathrm{const}\cdot e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$ с определенными соотношениями между ω и $\mathbf{k}$. Переходя к следующему, второму, приближению, надо положить $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$, причем в правой стороне уравнений (в квадратичных членах) надо сохранить только члены с $\mathbf{u}_0$. Поскольку $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет, по определению, однородным линейным уравнениям без правых частей, то в левой стороне равенств члены с $\mathbf{u}_0$ взаимно сокращаются. В результате мы получим для компонент вектора $\mathbf{u}_1$ систему неоднородных линейных уравнений, в правой части которых стоят заданные функции координат и времени. Эти функции, получающиеся подстановкой $\mathbf{u}_0$ в правые стороны исходных уравнений, представляют собой сумму членов, каждый из которых пропорционален множителю вида $e^{i[(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}-(\omega_1-\omega_2)t]}$, или $e^{i[(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r}-(\omega_1+\omega_2)t]}$, где ω_1, ω_2 и $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ — частоты и волновые векторы каких-либо двух монохроматических волн первого приближения.

Как известно, частный интеграл линейных уравнений такого вида представляет собой сумму членов с такими же экспоненциальными множителями, какие стоят в свободных членах (правых сторонах) уравнений, и с надлежащим образом подобранными коэффициентами. Каждый из этих членов соответствует бегущей волне с частотой $\omega_1 \pm \omega_2$ и волновым вектором $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ (частоты, равные сумме или разности частот исходных волн, называют *комбинационными*).

Таким образом, эффекты ангармоничности третьего порядка приводят к тому, что на совокупность основных монохроматических волн (с частотами ω_1, ω_2, ... и волновыми векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, ...) налагаются некоторые «волны» слабой интенсивности с комбинационными частотами вида $\omega_1 \pm \omega_2$ и волновыми векторами

$\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. Мы говорим здесь о них как о «волнах» в кавычках, имея в виду, что они представляют собой некоторый поправочный эффект и не могут существовать сами по себе (за исключением некоторых особых случаев; см. ниже). Между $\omega_1 \pm \omega_2$ и $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ не удовлетворяются, вообще говоря, те соотношения, которые имеют место для частот и волновых векторов в обычных монохроматических волнах.

Ясно, однако, что возможны и такие специальные подборы значений ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_2, $\mathbf{k}_2$, при которых между $\omega_1 + \omega_2$ и $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ (будем говорить для определенности о суммах, а не о разностях) будет выполняться одно из тех соотношений, которые должны иметь место для монохроматических волн в данной среде. Вводя обозначения $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, мы можем сказать с математической точки зрения, что ω_3, $\mathbf{k}_3$ соответствуют в этих случаях волнам, удовлетворяющим однородным линейным уравнениям движения (без правой части) первого приближения. Если в правой стороне уравнений движения второго приближения имеются члены, пропорциональные $e^{i(\mathbf{k}_3\mathbf{r}-\omega_3 t)}$ с такими ω_3, $\mathbf{k}_3$, то, как известно, частный интеграл этих уравнений будет представлять собой волну этой частоты с амплитудой, неограниченно возрастающей со временем.

Таким образом, наложение двух монохроматических волн ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_2, $\mathbf{k}_2$, для которых суммы ω_3, $\mathbf{k}_3$ удовлетворяют указанному условию, приводит в результате эффекта ангармоничности к явлению резонанса — возникает новая настоящая монохроматическая волна ω_3, $\mathbf{k}_3$, амплитуда которой возрастает со временем и в конце концов перестает быть малой. Очевидно, что если при наложении волн ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_2, $\mathbf{k}_2$ возникает волна ω_3, $\mathbf{k}_3$, то при наложении волн ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_3, $\mathbf{k}_3$ тоже будет иметь место резонанс и возникает волна $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1$, а при наложении волн ω_2, $\mathbf{k}_2$ и ω_3, $\mathbf{k}_3$ возникает волна ω_1, $\mathbf{k}_1$.

В частности, в изотропном теле ω связано с $\mathbf{k}$ посредством $\omega = c_t k$ или $\omega = c_l k$, причем $c_l \gg c_t$. Легко видеть, в каких случаях возможно выполнение какого-либо из этих соотношений для каждой из трех волн: ω_1, $\mathbf{k}_1$; ω_2, $\mathbf{k}_2$ и $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Если $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ не совпадают по направлению, то $k_3 < k_1 + k_2$; ясно поэтому, что при таких $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ резонанс возможен лишь в следующих двух случаях: 1) волны ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_2, $\mathbf{k}_2$ поперечны, а волна ω_3, $\mathbf{k}_3$ продольна; 2) одна из волн ω_1, $\mathbf{k}_1$ или ω_2, $\mathbf{k}_2$ продольна, другая поперечна, а волна ω_3, $\mathbf{k}_3$ продольна. Если же векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ имеют одинаковое направление, то резонанс возможен в случаях, когда все три волны продольны или все три поперечны.

Эффект ангармоничности с явлением резонанса возникает не только при наложении нескольких монохроматических волн, но и при наличии всего одной только волны ω_1, $\mathbf{k}_1$. В этом случае в правой стороне уравнений движения имеются члены, пропорцио-

нальные $e^{2i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}-\omega_1 t)}$. Но если для ω_1, $\mathbf{k}_1$ удовлетворяется обычное соотношение, то (в силу однородности первого порядка этого соотношения) оно удовлетворяется и для $2\omega_1$, $2\mathbf{k}_1$. Таким образом, эффект ангармоничности приводит к появлению наряду с каждой из имеющихся монохроматических волн ω_1, $\mathbf{k}_1$ также и волны $2\omega_1$, $2\mathbf{k}_1$ с удвоенными частотой и волновым вектором, причем амплитуда этой волны растет со временем.

Наконец, остановимся коротко на том, каким образом могут быть составлены уравнения движения с учетом ангармонических членов. Тензор деформации должен определяться теперь полным выражением (1,3)

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \tag{26,1}$$

в котором нельзя пренебречь квадратичными по u_i членами. Далее, общее выражение для плотности энергии $\mathscr{E}$ [1]) для тел с данной симметрией должно быть написано как скаляр, составленный из компонент тензора u_{ik} и некоторых характерных для вещества тела постоянных тензоров, содержащих члены до желаемой степени по u_{ik}. Подставляя затем выражение (26,1) для u_{ik} и отбрасывая члены слишком высоких порядков по u_i, получим энергию $\mathscr{E}$ как функцию производных $\partial u_i/\partial x_k$ с желаемой степенью точности.

Для того чтобы получить уравнения движения, заметим следующее. Вариация $\delta\mathscr{E}$ может быть написана в виде

$$\delta\mathscr{E}=\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}\,\delta\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

или, вводя обозначение:

$$\sigma_{ik}=\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\,(\partial u_i/\partial x_k)}, \tag{26,2}$$

переписываем $\delta\mathscr{E}$ следующим образом:

$$\delta\mathscr{E}=\sigma_{ik}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik}\,\delta u_i)-\delta u_i\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

Коэффициенты при $-\delta u_i$ представляют собой компоненты силы, отнесенной к единице объема тела. Они имеют формально прежний вид, и потому уравнения движения могут быть написаны по-прежнему в виде

$$\rho_0\ddot{u}_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{26,3}$$

где ρ_0 — плотность недеформированного тела, а компоненты тензора σ_{ik} определяются теперь, согласно (26,2), с $\mathscr{E}$, написанным с желаемой степенью точности. Тензор σ_{ik} теперь не симметричен.

---

[1]) Мы говорим здесь о внутренней энергии $\mathscr{E}$, а не о свободной энергии F, поскольку речь идет об адиабатических колебаниях.

Подчеркнем, что σ_{ik} не имеет теперь смысла плотности потока импульса (тензора напряжений). В обычной теории такое истолкование получалось в результате интегрирования плотности объемной силы $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ по объему тела. При этом существенно, что при интегрировании мы не делали различия между координатами точек тела до и после деформирования, пренебрегая разницей между ними. Однако при переходе к следующим приближениям такое пренебрежение становится невозможным, и поверхность, ограничивающая область интегрирования, не совпадает с реальной поверхностью рассматриваемого участка тела после его деформирования.

В § 2 было показано, что симметричность тензора σ_{ik} связана с сохранением момента импульса. Теперь этот результат не имеет места в связи с тем, что плотность момента импульса должна записываться не в виде $x_i\dot{u}_k - x_k\dot{u}_i$, а как

$$(x_i + u_i)\,\dot{u}_k - (x_k + u_k)\,\dot{u}_i.$$

Задача

Написать общее выражение для упругой энергии изотропного тела в третьем приближении.

Решение. Из компонент симметрического тензора второго ранга можно составить два квадратичных скаляра (u_{ik}^2 и u_{ll}^2) и три кубических (u_{ll}^3, $u_{ll}u_{ik}^2$, $u_{ik}u_{il}u_{kl}$). Поэтому наиболее общий вид скалярного выражения, содержащего члены второй и третьей степеней по u_{ik} со скалярными же (изотропное тело!) коэффициентами, есть

$$\mathscr{E} = \mu u_{ik}^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3}\right) u_{ll}^2 + \frac{A}{3}\, u_{ik}u_{il}u_{kl} + Bu_{ik}^2 u_{ll} + \frac{C}{3}\, u_{ll}^3$$

(коэффициенты при u_{ik}^2 и u_{ll}^2 выражены через модули сжатия и сдвига; A, B, C — три новые постоянные). Подставляя сюда выражение (26,1) для u_{ik} и оставляя члены до третьего порядка включительно, получим упругую энергию в виде

$$\mathscr{E} = \frac{\mu}{4}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3}\right)\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2 +$$
$$+ \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left(\frac{B+K}{2} - \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)^2 +$$
$$+ \frac{A}{12}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{B}{2}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{C}{3}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^3.$$