

ГЛАВА IV

ДИСЛОКАЦИИ¹⁾

§ 27. Упругие деформации при наличии дислокации

Упругие деформации в кристалле могут быть связаны не только с воздействием на него внешних сил, но и с наличием в нем внутренних дефектов структуры. Основным видом таких дефектов, существенных для механических свойств кристаллов, являются так называемые *дислокации*. Изучение свойств дислокаций с атомарной, микроскопической точки зрения не входит, разумеется, в план этой книги; мы рассмотрим здесь лишь чисто макроскопические аспекты этого явления с точки зрения теории упругости. Однако для лучшего уяснения физического смысла излагаемых соотношений предварительно напомним на двух простых примерах, в чем заключается характер дислокационных дефектов с точки зрения структуры кристаллической решетки.

Представим себе, что в кристаллическую решетку (разрез которой изображен на рис. 22) вдвинута «лишняя» кристаллическая полуплоскость (совпадающая на рисунке с верхней полуплоскостью y, z). Линия края этой полуплоскости (перпендикулярная плоскости рисунка ось z) называется в этом случае *краевой дислокацией*. Искажение структуры решетки в непосредственной близости к дислокации велико, но уже на расстояниях порядка нескольких периодов кристаллические плоскости смыкаются друг с другом почти правильным образом. Деформация существует, однако, и вдали от дислокации. Она ясно обнаруживается при обходе в плоскости x, y по узлам решетки вдоль замкнутого контура вокруг начала координат: если определять вектором \mathbf{u} смещение каждого узла от его положения в идеальной решетке, то полное приращение этого вектора при обходе будет отлично от нуля и равно одному периоду вдоль оси x .

Другой тип дислокации можно наглядно представить себе как результат «разреза» решетки по полуплоскости, после чего части

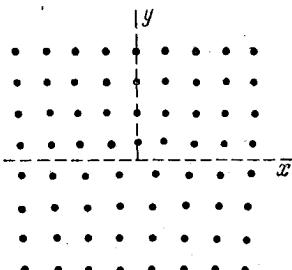


Рис. 22

¹⁾ Эта глава написана совместно с А. М. Косевичем.

решетки по обе стороны разреза сдвигаются относительно друг друга на один период параллельно краю разреза (который называется в этом случае *винтовой дислокацией*). Наличие такой дислокации превращает кристаллические плоскости в решетке в геликоидальную поверхность (подобную винтовой лестнице без ступенек). При полном обходе вокруг линии дислокаций (ось геликоидальной поверхности) вектор смещения узлов получает приращение на один период параллельно этой оси. На рис. 23 изображена схема описанного разреза.

С макроскопической точки зрения дислокационная деформация кристалла как сплошной среды обладает в общем случае следующим свойством: при обходе по любому замкнутому контуру L ,

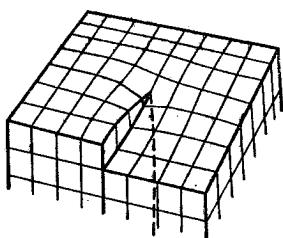


Рис. 23

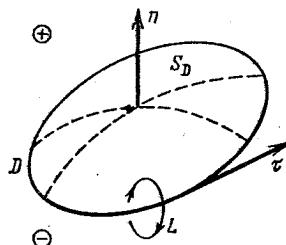


Рис. 24

охватывающему линию дислокации D , вектор упругого смещения b получает определенное конечное приращение b , равное (по величине и направлению) одному из периодов решетки; постоянный вектор b называется *вектором Бюргерса* данной дислокации. Это свойство записывается в виде

$$\oint_L du_i = \oint_L \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = -b_i, \quad (27.1)$$

причем принимается, что направление обхода контура связано правилом винта с выбранным направлением вектора касательной к линии дислокации τ (рис. 24). Сама линия дислокации является при этом линией особых точек поля деформации.

Упомянутым выше простым случаям краевой и винтовой дислокаций отвечают прямые линии D , вдоль которых $\tau \perp b$ или $\tau \parallel b$. Отметим также, что в изображенной на рис. 22 наглядной картине краевые дислокации с противоположными направлениями b различаются тем, что «лишняя» кристаллическая полуплоскость лежит сверху или снизу от плоскости x, y (о таких дислокациях говорят как о различающихся по знаку).

В общем случае дислокация является кривой линией, вдоль которой угол между τ и b меняется. Самый же вектор Бюргерса b неизбежно постоянен вдоль всей линии дислокации. Очевидно также, что линия дислокации не может просто окончиться внутри

кристалла (ср. ниже примечание на стр. 152). Она должна выходить обоими концами на поверхность кристалла либо (как это обычно и бывает в реальных условиях) представлять собой замкнутую петлю.

Условие (27.1) означает, другими словами, что при наличии дислокации вектор смещения является неоднозначной функцией координат, получающей заданное приращение при обходе вокруг линии дислокации. Физически, разумеется, никакой неоднозначности нет: приращение b означает дополнительное смещение точек решетки на один из периодов, что вообще не меняет ее состояния. В частности, тензор напряжений σ_{ik} , характеризующий упругое состояние кристалла, является однозначной и непрерывной функцией координат.

Для дальнейшего будет удобным ввести обозначение

$$w_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad (27.2)$$

с помощью которого условие (27.1) записывается в виде

$$\oint_L w_{ik} dx_i = -b_k. \quad (27.3)$$

Тензор w_{ik} (несимметричный) принято называть *тензором дисторсии*. Его симметричная часть дает обычный тензор деформации

$$u_{ik} = \frac{1}{2}(w_{ik} + w_{ki}). \quad (27.4)$$

Тензоры w_{ik} и u_{ik} — однозначные функции координат, в противоположность неоднозначной функции u (г).

Условие (27.3) можно записать и в дифференциальном виде. Для этого преобразуем интеграл по контуру L в интеграл по какой-либо поверхности S_L , опирающейся на этот контур¹⁾:

$$\oint_L w_{mk} dx_m = \int_{S_L} e_{ilm} \frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} d\ell_i. \quad (27.5)$$

Поскольку тензор e_{ilm} антисимметричен по индексам l, m , а тензор $\partial w_{mk}/\partial x_l = \partial^2 u_k/\partial x_l \partial x_m$ симметричен по этим же индексам, то подынтегральное выражение тождественно равно нулю везде, за исключением точки пересечения линии D с поверхностью S_L ; на самой линии дислокации, как линии особых точек, представление

¹⁾ Согласно теореме Стокса преобразование осуществляется заменой элемента интегрирования по линии dx_m оператором

$$dx_m \rightarrow e_{ilm} d\ell_i \frac{\partial}{\partial x_l},$$

где e_{ilm} — единичный антисимметричный тензор, $d\ell$ — элемент площади. Напомним, что выражение вида $e_{ilm} a_i b_l$ есть компонента $[ab]_m$ векторного произведения векторов a и b .

w_{mk} в виде производных (27,2) теряет смысл¹⁾. В этих точках величины w_{ik} надо определить с помощью соответствующей δ -функции так, чтобы интеграл (27,5) приобрел требуемое значение $-b_k$. Пусть ξ — двухмерный радиус-вектор, отсчитываемый от оси дислокации в данной ее точке в плоскости, перпендикулярной вектору τ . Элемент площади этой плоскости выражается через элемент $d\mathbf{f}$ поверхности S_L как $\tau \, d\mathbf{f}$. По определению двумерной δ -функции $\delta(\xi)$ имеем

$$\int \delta(\xi) \tau \, d\mathbf{f} = \tau_i \int \limits_{S_L} \delta(\xi) \, df_i = 1.$$

Ясно поэтому, что для достижения поставленной цели надо положить

$$e_{ilm} - \frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} = -\tau_i b_k \delta(\xi). \quad (27,6)$$

Это и есть искомая дифференциальная запись условия (27,3).

Поле смещений \mathbf{u} (г) вокруг дислокации может быть выражено в общем виде, если известен тензор Грина G_{ik} уравнений равновесия данной анизотропной среды, т. е. функция, определяющая смещение u_i , созданное в неограниченной среде сосредоточенной в начале координат единичной силой, направленной вдоль оси x_k (см. § 8). Это легко сделать с помощью следующего формального приема.

Вместо того чтобы искать неоднозначные решения уравнений равновесия, будем рассматривать \mathbf{u} (г) как однозначную функцию, условившись, что она испытывает заданный скачок b на некоторой произвольно выбранной поверхности S_D , опирающейся на дислокационную петлю D . Если u_+ и u_- — значения функции соответственно на верхнем и нижнем берегах разрыва S_D , то

$$u_+ - u_- = b. \quad (27,7)$$

(«Верхний» и «нижний» берега определены на рис. 24. Нормаль \mathbf{n} к поверхности S_D , направленная по отношению к τ указанным на рисунке образом, дает направление от нижнего берега к верхнему). Интегрирование по контуру L от верхнего берега к нижнему дает тогда результат (27,3) с правильным знаком. Тензоры $[w_{ik}$ и $u_{ik}]$, формально определенные согласно (27,3—4), будут иметь на «поверхности разрыва» δ -образную особенность:

$$w_{ik}^{(S)} = n_i b_k \delta(\zeta), \quad u_{ik}^{(S)} = \frac{1}{2} (n_i b_k + n_k b_i) \delta(\zeta), \quad (27,8)$$

где ζ — координата, отсчитываемая от поверхности S_D вдоль нормали \mathbf{n} ($d\zeta = \mathbf{n} \, d\mathbf{l}$, где $d\mathbf{l}$ — элемент длины контура L).

¹⁾ Если бы линия дислокации оканчивалась в какой-либо точке внутри тела, то поверхность S_L могла бы быть выбрана охватывающей эту точку и тем самым нигде не пересекающей линию D . Тогда интеграл (27,5) обратился бы в нуль — в противоречии с поставленным условием.

Поскольку никакой физической особенности в среде вокруг дислокации в действительности нет, то тензор напряжений σ_{ik} , как уже было указано, должен быть однозначной везде непрерывной функцией. Между тем с тензором деформации (27,8) формально связан тензор напряжений

$$\sigma_{ik}^{(S)} = \lambda_{ijkl} u_{lm}^{(S)},$$

тоже имеющий особенность на поверхности S_D . Для того чтобы исключить его, надо ввести фиктивные объемные силы, распределенные вдоль поверхности S_D с определенной плотностью $f_i^{(S)}$. Уравнения равновесия при наличии объемных сил имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i^{(S)} = 0.$$

Отсюда ясно, что надо положить

$$f_i^{(S)} = -\frac{\partial \sigma_{ik}^{(S)}}{\partial x_k} = -\lambda_{ijkl} \frac{\partial u_{lm}^{(S)}}{\partial x_k}. \quad (27,9)$$

Таким образом, задача об отыскании неоднозначной функции $u_i(r)$ эквивалентна задаче об отыскании однозначной, но разрывной функции при наличии объемных сил, определяемых формулами (27,8—9). Теперь можно воспользоваться формулой

$$u_i(r) = \int G_{ij}(r - r') f_j^{(S)}(r') dV'.$$

Подставив сюда (27,8), производим интегрирование по частям; интеграл по бесконечно удаленной поверхности исчезает, а в оставшемся интеграле по объему δ -функция устраниется тривиальным образом. Заметив также, что $\partial G_{ij}/\partial x_k = -\partial G_{ij}/\partial x_k$, получим окончательно

$$u_i(r) = -\lambda_{jklm} b_m \int_{S_D} n_l \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(r - r') dV'. \quad (27,10)$$

Тем самым поставленная задача решена¹⁾.

Наиболее простой вид деформация (27,10) имеет вдали от замкнутой дислокационной петли. Если представлять себе петлю расположенной вблизи начала координат, то на больших (по сравнению с ее линейными размерами) расстояниях в производной $\partial G_{ij}/\partial x_k$ можно положить $r - r' \approx r$ и вынести ее за знак интеграла. Тогда получим

$$u_i(r) = -\lambda_{jklm} d_{lm} \frac{\partial G_{ij}(r)}{\partial x_k}, \quad (27,11)$$

¹⁾ Тензор G_{ij} для анизотропной среды найден в указанной на с. 43 статье. Этот тензор, вообще говоря, очень сложен. В случае прямолинейной дислокации, когда мы имеем дело с плоской задачей теории упругости, может оказаться проще непосредственно решать уравнения равновесия.

где

$$d_{ik} = S_i b_k, \quad S_i = \int\limits_{S_D} n_i d\Gamma = \frac{1}{2} e_{ikl} \oint\limits_D x_k dx_l. \quad (27,12)$$

Компоненты аксиального вектора S равны площадям, ограниченным проекциями петли D на плоскости, перпендикулярные соответствующим координатным осям; тензор d_{ik} естественно назвать тензором *дислокационного момента*. Компоненты тензора G_{ij} являются однородными функциями первого порядка от координат x, y, z (см. с. 44). Поэтому из (27,11) видно, что $u_i \propto 1/r^2$. Соответствующее же поле напряжений $\sigma_{ik} \propto 1/r^3$.

Легко выяснить также характер зависимости от расстояния упругих напряжений вокруг прямолинейной дислокации. В цилиндрических координатах z, r, φ (с осью z вдоль линии дислокации) деформация будет зависеть только от r и φ . Интеграл (27,3) не должен меняться, в частности, при произвольном подобном изменении размеров любого контура в плоскости x, y . Очевидно, что это возможно, лишь если все $\omega_{ik} \propto 1/r$. Той же степени $1/r$ будет пропорционален и тензор u_{ik} , а с ним и напряжения: $\sigma_{ik} \propto 1/r^3$.

Хотя до сих пор мы говорили только о дислокациях, но полученные формулы применимы также и к деформациям, вызываемым другого рода дефектами кристаллической структуры. Дислокации — линейные дефекты структуры. Наряду с ними существуют дефекты, в которых нарушение правильной структуры распространяется по области вблизи некоторой поверхности²⁾. С макроскопической точки зрения такой дефект может быть описан как поверхность разрыва, на которой вектор смещения и испытывает скачок (напряжения же σ_{ik} остаются непрерывными в силу условий равновесия). Если на всей поверхности величина b скачка одинакова, то в отношении создаваемых им деформаций такой разрыв ничем не отличается от дислокации (расположенной вдоль его края). Разница состоит лишь в том, что вектор b не равен периоду решетки. Положение же поверхности S_D , о которой была речь выше, перестает быть произвольным и должно совпадать с фактическим расположением физического разрыва. С такой поверхностью разрыва связана определенная дополнительная энергия, что может быть описано путем введения соответствующего коэффициента поверхностного натяжения.

¹⁾ Обратим внимание на определенную аналогию между полем упругой деформации вокруг линии дислокации и магнитным полем линейных проводников; роль силы тока играет при этом вектор Бюргерса. Однако, не говоря уже о совершенно различной природе тех и других физических явлений, степень аналогичности уменьшается также и различием в тензорном характере соответствующих величин.

²⁾ Известным примером такого рода дефектов является тонкая двойниковая прослойка в кристалле.

Задачи

1. Написать дифференциальные уравнения равновесия для дислокационной деформации в изотропной среде, выраженные через вектор смещения¹⁾.

Решение. В терминах тензора напряжений или тензора деформации уравнения равновесия имеют обычный вид: $\sigma_{ik}/\partial x_k = 0$ или, подставив σ_{ik} из (5,11):

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Но при переходе к вектору u надо учесть дифференциальное условие (27,6). Умножив (27,6) на e_{ikl} и упростив по i, k , получим²⁾

$$\frac{\partial w_{nk}}{\partial x_k} - \frac{\partial w_{kk}}{\partial x_n} = -[\tau b]_n \delta(\xi). \quad (2)$$

Переписав (1) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_{ki}}{\partial x_k} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial w_{ll}}{\partial x_i} = 0$$

и подставив сюда (2), находим

$$\frac{\partial w_{ki}}{\partial x_k} + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial w_{ll}}{\partial x_i} = [\tau b]_i \delta(\xi).$$

Переходя теперь к u , согласно (27,2), находим искомое уравнение для неоднозначной функции u (r) в виде

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} u = [\tau b] \delta(\xi). \quad (3)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять условию (27,1).

2. Определить деформацию вокруг прямолинейной винтовой дислокации в изотропной среде.

Решение. Выбираем цилиндрические координаты z, r, Φ с осью z вдоль линии дислокации; вектор Бюргерса: $b_x = b_y = 0, b_z = b$. Из соображений симметрии очевидно, что смещение u параллельно оси z и не зависит от координаты z . Уравнение равновесия (3) задачи 1 сводится к $\Delta u_z = 0$. Решение, удовлетворяющее условию (27,1)³⁾:

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \Phi.$$

У тензоров u_{ik} и σ_{ik} отличны от нуля лишь компоненты

$$u_{z\Phi} = \frac{b}{4\pi r}, \quad \sigma_{z\Phi} = \frac{\mu b}{2\pi r},$$

так что деформация представляет собой чистый сдвиг.

Свободная энергия дислокации (на единицу ее длины) дается интегралом

$$F = \frac{1}{2} \int 2u_{z\Phi}\sigma_{z\Phi} dV = \frac{\mu b^2}{4\pi} \int \frac{dr}{r},$$

¹⁾ Физический смысл этой и других задач, относящихся к изотропной среде, условен, поскольку реальные дислокации по самому своему существу свойственны лишь кристаллам, т. е. анизотропной среде. Эти задачи, однако, представляют определенный иллюстративный интерес.

²⁾ Напомним формулу

$$e_{ilm}e_{ilm} = \delta_{lk}\delta_{mn} - \delta_{ln}\delta_{mk}.$$

³⁾ Во всех задачах о прямолинейных дислокациях принимаем вектор τ в отрицательном направлении оси z .

логарифмически расходящимся на обоих пределах. В качестве нижнего предела следует взять величину порядка атомных расстояний ($\sim b$), на которых деформация велика и макроскопическая теория неприменима. Верхний же предел определяется размерами порядка длины L дислокации. Тогда

$$F = \frac{\mu b^2}{4\pi} \ln \frac{L}{b}.$$

Энергию же деформации в «сердцевине» дислокации вблизи ее оси (в области с площадью сечения $\sim b^2$) можно оценить как $\sim \mu b^2$. При $\ln(L/b) \gg 1$ эта энергия мала по сравнению с энергией поля упругой деформации¹⁾.

3. Определить внутренние напряжения в анизотропной среде вокруг винтовой дислокации, перпендикулярной плоскости симметрии кристалла.

Решение. Выбираем систему координат x, y, z так, чтобы ось z совпадала с линией дислокации (и снова пишем $b_z = b$). Вектор u опять имеет лишь компоненту $u_z = u(x, y)$. Так как плоскость x, y является плоскостью симметрии, то равны нулю все компоненты тензора λ_{iklm} , у которых индекс z встречается нечетное число раз. Поэтому отличны от нуля только две компоненты тензора σ_{ik} :

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \lambda_{xzxz} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{xzyz} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \sigma_{yz} &= \lambda_{yzxz} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{yzyz} \frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

Введем двухмерные вектор σ и тензор $\lambda_{\alpha\beta}$: $\sigma_\alpha = \sigma_{az}$, $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{az\beta z}$ ($\alpha = 1, 2$). Тогда

$$\sigma_\alpha = \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta},$$

а уравнение равновесия записывается в виде $\operatorname{div} \sigma = 0$. Искомое решение этого уравнения должно удовлетворять условию (27.1); $\oint \nabla u \, dl = b$.

В таком виде задача совпадает с задачей о нахождении индукции и напряженности магнитного поля (роль которого играют σ и ∇u) в анизотропной среде (с магнитной проницаемостью $\lambda_{\alpha\beta}$) вокруг прямолинейного тока, сила которого $I = cb/4\pi$. Воспользовавшись известным из электродинамики решением этой задачи, найдем

$$\sigma_{az} = -\frac{b}{2\pi} \frac{\lambda_{\alpha\beta} e_\beta y_x}{V|\lambda| \lambda_{\alpha'\beta'}^{-1} x_\alpha' x_\beta'},$$

где $|\lambda|$ — определитель тензора $\lambda_{\alpha\beta}$ (см. VIII, задача 5 к § 30).

4. Определить деформацию вокруг прямолинейной краевой дислокации в изотропной среде.

Решение. Пусть ось z направлена вдоль линии дислокации, а вектор Бюргерса: $b_x = b$, $b_y = b_z = 0$. Из симметрии задачи очевидно, что вектор деформации лежит в плоскости x, y и не зависит от z , так что мы имеем дело с плоской задачей. Ниже в этой задаче все векторы и векторные операции — двухмерные в плоскости x, y .

Будем искать решение уравнения

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} u = -b j \delta(r)$$

¹⁾ Эти оценки имеют общий характер и справедливы по порядку величины для любой (не только винтовой) дислокации. Следует отметить, что фактически значения $\ln(L/b)$ обычно не столь велики, так что энергия «сердцевины» составляет заметную часть полной энергии дислокации.

(см. задачу 1; \mathbf{j} — единичный вектор вдоль оси y) в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{w}$, где $\mathbf{u}^{(0)}$ — вектор с составляющими

$$u_x^{(0)} = -\frac{b}{2\pi} \varphi, \quad u_y^{(0)} = \frac{b}{2\pi} \ln r$$

(мнимая и вещественная части от $(b/2\pi) \ln(x+iy)$); r, φ — полярные координаты в плоскости x, y . Этот вектор удовлетворяет условию (27.1). Поэтому задача сводится к нахождению однозначной функции \mathbf{w} . Поскольку, как легко убедиться,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad \Delta \mathbf{u}^{(0)} = b \mathbf{j} \delta(r),$$

то \mathbf{w} удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{w} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} = -2b \mathbf{j} \delta(r).$$

Это — уравнение равновесия под действием сил, сосредоточенных вдоль оси z с объемной плотностью

$$\frac{Eb\mathbf{j}}{(1+\sigma)} \delta(r)$$

(ср. уравнение (1) в задаче к § 8). С помощью найденного в той же задаче тензора Грина для неограниченной среды нахождение \mathbf{w} сводится к вычислению интеграла

$$\mathbf{w} = \frac{b}{8\pi(1-\sigma)} \int_0^\infty \left[\frac{(3-4\sigma)\mathbf{j}}{R} + \frac{ry}{R^3} \right] dz', \quad R = \sqrt{r^2 + z'^2}.$$

В результате получим

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{xy}{x^2+y^2} \right\},$$

$$u_y = -\frac{b}{2\pi} \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \ln \sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right\}.$$

Вычисленный отсюда тензор напряжений имеет декартовы компоненты

$$\sigma_{xx} = -bB \frac{y(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_{yy} = bB \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_{xy} = bB \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

или полярные

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -bB \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \sigma_{r\varphi} = bD \frac{\cos \varphi}{r},$$

где обозначено $B = \mu/2\pi(1-\sigma)$.

5. Бесконечное число одинаковых параллельных прямолинейных краевых дислокаций в изотропной среде расположены в одной плоскости, перпендикулярной их векторам Бюргерса, на одинаковых расстояниях h друг от друга. Найти напряжения сдвига, создаваемые такой «дислокационной стенкой» на расстояниях, больших по сравнению с h .

Решение. Пусть дислокации параллельны оси z и расположены в плоскости y, z . Согласно результатам задачи 4 суммарное напряжение, создаваемое всеми дислокациями в точке x, y , дается суммой

$$\sigma_{xy}(x, y) = bBx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - (y-nh)^2}{[x^2 + (y-nh)^2]^2}.$$

Перепишем эту сумму в виде

$$\sigma_{xy} = -bB \frac{\alpha}{h} \left[J(\alpha, \beta) + \alpha \frac{\partial J(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right],$$

где

$$J(\alpha, \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (\beta - n)^2}, \quad \alpha = \frac{x}{h}, \quad \beta = \frac{y}{h}.$$

Согласно формуле суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i k x} dx,$$

найдем

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\alpha^2 + \xi^2} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i k \beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k \xi} d\xi}{\alpha^2 + \xi^2} = \\ &= \frac{\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k \alpha} \cos 2\pi k \beta. \end{aligned}$$

При $\alpha = x/h \gg 1$ в сумме по k можно оставить лишь первый член, и в результате получим

$$\sigma_{xy} = 4\pi^2 B \frac{bx}{h^2} e^{-2\pi x/h} \cos \left(2\pi \frac{y}{h} \right).$$

Таким образом, напряжения убывают при удалении от стенки по экспоненциальному закону.

6. Определить деформацию изотропной среды вокруг дислокационной петли (*J. M. Burgers*, 1939).

Решение. Исходим из формулы (27,10). Тензор λ_{iklm} для изотропной среды согласно (5.9) и (5.11) может быть представлен в виде

$$\lambda_{iklm} = \mu \left\{ \frac{2\sigma}{1-2\sigma} \delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl} \right\}.$$

Тензор Грина для изотропной среды найден в задаче к § 8 и может быть представлен как

$$G_{ik}(\mathbf{R}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\sigma)R} \{(3-4\sigma)\delta_{ik} + v_i v_k\}.$$

Здесь $\mathbf{R} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — радиус-вектор от элемента $d\mathbf{f}'$ (в точке \mathbf{r}') к точке наблюдения деформации (точка \mathbf{r}); $\mathbf{v} = \mathbf{R}/R$ — единичный вектор в этом направлении. Подставив эти выражения в (27,10) и произведя под интегралом требуемые дифференцирования, получим после вычисления

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= \frac{1-2\sigma}{8\pi(1-\sigma)} \int_{S_D} \frac{1}{R^3} \{ \mathbf{b}(\mathbf{v} d\mathbf{f}') + (\mathbf{b}\mathbf{v}) d\mathbf{f}' - \mathbf{v}(\mathbf{b} d\mathbf{f}') \} + \\ &\quad + \frac{3}{8\pi(1-\sigma)} \int_{S_D} \frac{1}{R^3} \mathbf{v}(\mathbf{b}\mathbf{v})(\mathbf{v} d\mathbf{f}'). \end{aligned} \quad (1)$$

Стоящие здесь интегралы можно выразить через интегралы по контуру D — по петле дислокации. Для этого замечаем следующие формулы:

$$\oint_D \frac{1}{R} [b dl'] = \int_{S_D} \frac{1}{R^3} \{(bv) df' - v(b df')\},$$

$$\oint_D [bv] dl' = - \int_{S_D} \frac{1}{R} \{b df' + (bv)(v df')\}.$$

Интегралы в правых частях равенств получаются из контурных интегралов в левой стороне применением теоремы Стокса, согласно которой преобразование осуществляется заменой $dl' \rightarrow [df' \cdot \nabla']$ (где $\nabla' = \partial/\partial r'$); поскольку подынтегральное выражение зависит только от разности $r - r'$, это преобразование эквивалентно замене $dl' \rightarrow [df' \cdot \nabla]$ (где $\nabla = \partial/\partial r$). Введем также телесный угол Ω , под которым петля D видна из точки наблюдения, согласно определению

$$\Omega = \int \frac{1}{R^2} v df'.$$

Тогда поле смещений представится в виде

$$u(r) = b \frac{\Omega}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \oint_D \frac{1}{R} [b dl'] + \frac{1}{8\pi(1-\sigma)} \nabla \oint_D [(bv) dl'].$$

Неоднозначность этой функции заключена в первом члене — угол Ω меняется на 4π при обходе вокруг линии D .

Вдали от петли выражение (1) сводится к

$$u(r) = \frac{1-2\sigma}{8\pi(1-\sigma) R^2} \{S(bv) + b(Sv) - v(Sb)\} + \frac{3}{8\pi(1-\sigma) R^2} (Sv)(bv)v.$$

Эту формулу можно было бы получить и непосредственно из (27,11—12).

§ 28. Действие поля напряжений на дислокацию

Рассмотрим дислокационную петлю D в поле упругих напряжений $\sigma_{ik}^{(e)}$, созданных действующими на тело внешними нагрузками, и вычислим силу, действующую на нее в этом поле. Согласно общим правилам для этого надо найти работу δR_D , производимую над дислокацией при бесконечно малом ее смещении.

Вернемся к введенному в § 27 представлению о дислокационной петле D как линии, на которую опирается поверхность (S_D) разрыва вектора смещения; величина разрыва дается формулой (27,7). Смещение линии дислокации D приводит к изменению поверхности S_D . Пусть δx — вектор смещения точек линии D . Смещаясь на δx , элемент dl длины линии описывает площадь $\delta f = [\delta x \cdot dl] = [\delta x \cdot \tau] dl$, чем и определяется приращение площади поверхности S_D . Поскольку речь идет теперь о реальном, физическом смещении дислокации, необходимо учесть, что указанная операция сопровождается изменением физического объема среды. Поскольку смещения и точек среды по обе стороны поверхности